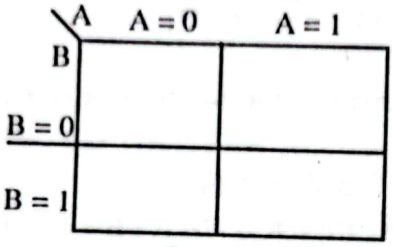
৮.৬ কারনু ম্যাপের সংজ্ঞা (Define Karnaugh map structure of Karnaugh map) ঃ

যুক্তি থিওরেম ব্যবহার করে বুলিয়ান অ্যালজেবরার সাহায্যে রাশিমালা সরলীকরণে কতকগুলো অসুবিধা আছে। কারণ রাশিমালা দেখে সহজে বুঝা যায় না রাশিমালাটি সরলীকরণ সম্ভব কি না। তা ছাড়া কতদূর পর্যন্ত সরলীকরণ সম্ভব তা রাশিমালা হতে সহজে বুঝে উঠা দরকার। মরিস কারনু (Maurice Karnaugh) ম্যাপের সাহায্যে যুক্তি রাশিমালা সরলীকরণের একটি পদ্ধতি উদ্ভাবন করেন। এই পদ্ধতি কারনু ম্যাপ পদ্ধতি নামে পরিচিত। কতকগুলো বর্গাকৃতি খোপের সমষ্টি দ্বারা কারনু ম্যাপ তৈরি করা হয়। রাশিমালার চলকের সংখ্যার উপর নির্ভর করে ম্যাপে বর্গাকৃতি খোপের সংখ্যা ; চলকের সংখ্যা n হলে ম্যাপে খোপের সংখ্যা হবে 2^n। সাধারণত দুই হতে চারটি চলক (Variables) বিশিষ্ট রাশিমালা সরলীকরণের জন্য কারনু ম্যাপ পদ্ধতির বহুল ব্যবহার রয়েছে। এই অধ্যায়ে দুই, তিন ও চার চলকবিশিষ্ট রাশিমালা সরলীকরণের ব্যাপারে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

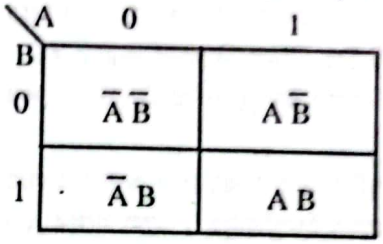
৮.৭ কারনু ম্যাপের গঠন কাঠামো (Structure of Karnaugh map) ঃ

● দুই চলক কারনু ম্যাপ (Two variable Karnaugh map) ঃ

৮.৮ নং চিত্রে A এবং B দু'টি চলকের জন্য কারনু ম্যাপ দেখানো হয়েছে। এই ম্যাপে চারটি ($2^2 = 4$) খোপ আছে।



চিত্র ঃ ৮.৮



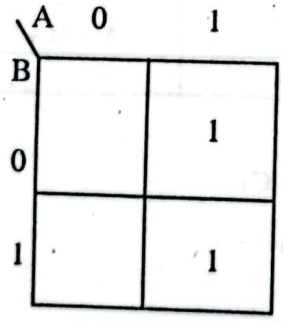
চিত্র ঃ ৮.৯

ডানদিকে খোপ দু'টির জন্য A = 1 এবং বামদিকের খোপ দুটির জন্য A = 0 ধরা হয়েছে। তেমনি উপরের খোপ দুটির জন্য B = 0 এবং নিচের খোপ দুটির জন্য B = 1 ধরা হয়েছে। কাজেই প্রতিটি খোপ দু'টি চলকের একটি মিলিত অবস্থা নির্দিষ্ট করে। ৮.৮ নং চিত্রে দেখানো এসব অবস্থার জন্য চলকের মান নিম্নে দেখানো হলো–

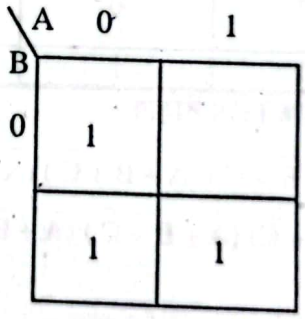
$\bar{A}\bar{B}$ (A = 0, B = 0) AB (A = 1, B = 1

$\bar{A}B$ (A = 0, B = 1) $A\bar{B}$ (A = 1, B = 0)

গুণ দ্বারা প্রকাশিত রাশিতে সবগুলো চলক থাকলে তা মিন টার্ম নামে পরিচিত হয়। $\bar{A}\bar{B}$ অথবা $\bar{A}B$ দুই চলকবিশিষ্ট মিন টার্মের দুটি উদাহরণ। ৮.১০ ও ৮.১১নং চিত্রে দুই চলক কারনু ম্যাপের উদাহরণ দেয়া হয়েছে। এই চিত্রে 1 দ্বারা খোপ চলকসমূহের মিলিত অবস্থা নির্দিষ্ট করা হয়।

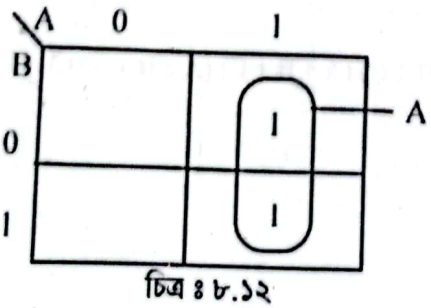


চিত্র ঃ ৮.১০

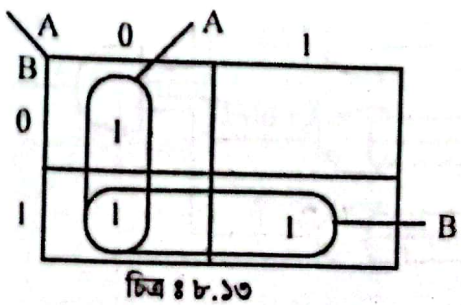


চিত্র ঃ ৮.১১

কোনো কম্বিনেশনের অনুপস্থিতি খালি খোপ দ্বারা নির্দিষ্ট করা হয়। ৮.১০ নং চিত্রে দেখানো ম্যাপ হতে পঠিত রাশি দুটি হলো AB নিম্নের ৮.১৩ চিত্রের রাশি তিনটি হলো $A\bar{B}$ ও $\bar{A}B$ ও AB ।



চিত্র ঃ ৮.১২



চিত্র ঃ ৮.১৩

এই ম্যাপে দুটি সন্নিহিত খোপকে একটিমাত্র চলক দ্বারা নির্দিষ্ট করা সম্ভব। যেমন– ৮.১২ নং চিত্রের ডান পার্শ্বের খোপ দুটির জন্য A = 1 এবং B = 0 ও B = 1 হয়। সুতরাং এই খোপ দুটিকে B ছাড়া শুধু A দিয়ে নির্দিষ্ট করা সম্ভব। কারনু ম্যাপে একটি চলকের মানের পার্থক্যের জন্য পাশাপাশি অবস্থিত খোপকে সন্নিহিত খোপ বলা হয়। ৮.১২ নং চিত্রের খোপ দুটি একসাথে A দ্বারা নির্দিষ্ট করার জন্য একটি বেষ্টনী দ্বারা আবদ্ধ করা হয়েছে। $A\bar{B} + AB$ এ রাশিমালার প্রতিটি রাশিতে A আছে, সেজন্য উপরের সরলীকরণের ফলাফল নিম্নলিখিতভাবে দেখানো যায়–

$$A\bar{B} + AB = A(\bar{B} + B)$$
$$= A.1 = A.$$

৮.১৩ নং চিত্রে দেখানো ম্যাপে দুই সেট সন্নিহিত খোপ আছে। এই সেট দুটিকে পৃথক বেষ্টনী দ্বারা দেখানো হয়েছে। লক্ষণীয় যে, এমন সন্নিহিত অবস্থা নির্ণয়ের জন্য কোনো খোপকে একাধিকবার ব্যবহার করা যায়। বাম পাশের বেষ্টনীর জন্য A = 0 এবং B = 0 ও B = 1 কাজেই এই বেষ্টনীকে শুধু A দ্বারা নির্দিষ্ট করা হয়। তেমনি নিচের সমান্তরাল বেষ্টনীকে শুধু B দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়, কারণ এক্ষেত্রে B = 1 এবং A = 0 ও A = 1 হয়। দুই বেষ্টনীর রাশি দুইটি সংযুক্ত করে ৮.১৩ নং ম্যাপের জন্য সংক্ষিপ্ত রাশিমালা $\bar{A} + B$ হয়। উপরের এই ফলাফলকে বুলিয়ান অ্যালজেবরার সাহায্যে প্রমাণ করলে ৮.১৩ নং চিত্র হতে–

$$\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + AB = \bar{A}(\bar{B} + B) + AB$$
$$= \bar{A}.1 + AB$$
$$= \bar{A} + AB$$
$$= (\bar{A} + A)(\bar{A} + B)$$
$$= 1.(\bar{A} + B)$$
$$= \bar{A} + B$$

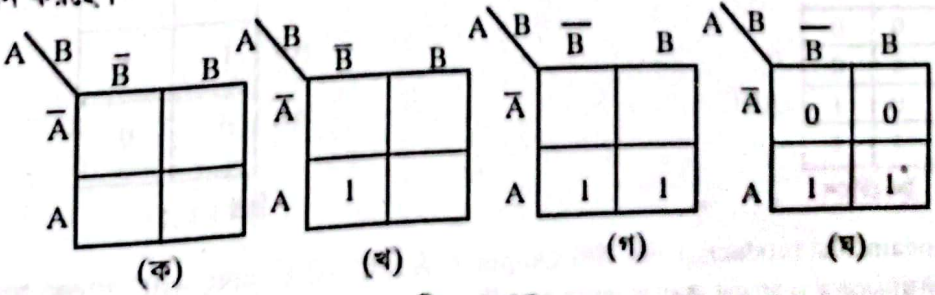
উপরের আলোচনা হতে দুই-চলক কারনু ম্যাপের নিয়মাবলি সংক্ষেপে নিম্নে দেয়া হলো–

- 1–একটি 1-খোপকে দুই চলক AND ক্রিয়া দ্বারা নির্দিষ্ট করা হয়।
- 2–দুটি সন্নিহিত খোপকে একক চলক রাশি দ্বারা নির্দিষ্ট করা হয়।
- 3–ম্যাপ হতে পঠিত রাশিসমূহের OR ক্রিয়া দ্বারা সরলীকৃত রাশিমালা তৈরি করা হয়।

কারনু ম্যাপ তৈরিতে A কে ভেরিয়েবল (চলক) এবং $\bar{A}$ কে কমপ্লিমেন্ট (সম্পূরক) বলে। ম্যাপের ক্ষেত্রে ব্যবহৃত ভার্টিক্যাল (উপর হতে নিচের দিকে) কলামের জন্য দুই ভেরিয়েবল ম্যাপে $A\ \bar{A}$ এবং হরিজন্টাল কলামের জন্য (পাশাপাশি) $B\bar{B}$ ব্যবহার করা যায়। উদাহরণস্বরূপ– আমরা নিম্নের সত্যক সারণি হতে এই নিয়মে দুই চলক কারনু ম্যাপ তৈরি করতে পারি–

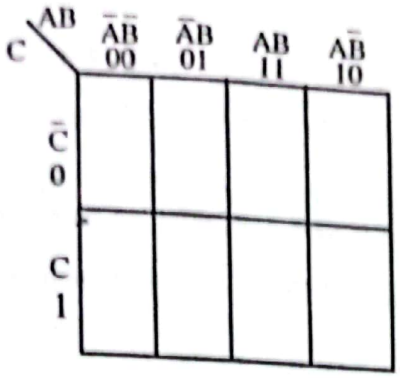
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

উপরের সারণিতে দেখা যায় যখন A = 1 এবং B = 0 হয় তখন Output এ 1 পাওয়া যায়, এর ফান্ডামেন্টাল প্রোডাক্ট হয় $A\bar{B}$। ফলে কারনু ম্যাপ ৮.১৪ (খ) নং চিত্রে 1 প্রবেশ করল। এই 1 দ্বারা $A\bar{B}$ প্রোডাক্টকে নির্দেশ করা হয়েছে কারণ A এর সারি এবং B এর কলামে 1 অবস্থান করছে।

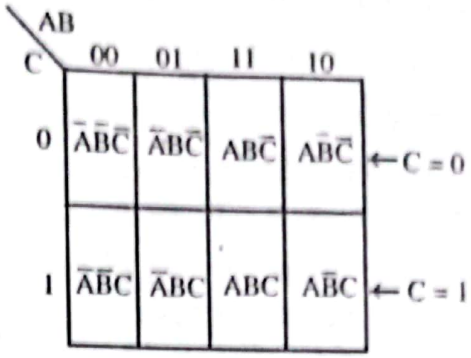


চিত্র ঃ ৮.১৪

আমরা জানি, তিন চলক কারনু ম্যাপে চলকের জন্য ($2^3 = 8$) আটটি খোপ থাকে। ম্যাপের নিচের চারটি খোপের জন্য C = 1 হয় এবং উপরের চারটি খোপের জন্য C = 0 হয়।



চিত্র ঃ ৮.১৮



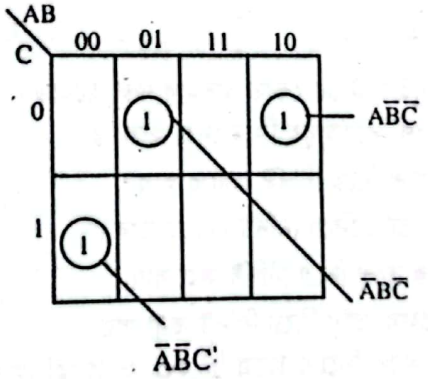
চিত্র ঃ ৮.১৯

তেমনি A, B এর বিভিন্ন মিলিত অবস্থার দ্বারা খোপগুলোকে খাড়া চারভাগে ভাগ করা হয়েছে। ৮.১৯ নং চিত্রে প্রতিটি খোপের জন্য গুণের রাশি দেখানো হয়েছে। এই ম্যাপে A, B এই দু'টি চলকের বাইনারি মানের ক্রমিক অবস্থান অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। লক্ষণীয় যে, পাশাপাশি দুটি মানের মধ্যে শুধু একটি চলকের পরিবর্তন থাকে। যুক্তি রাশিমালা সরলীকরণের জন্য A,B এর মানে 00,01,11, 10 এই ক্রমিক অবস্থান দরকার। বস্তুত এখানে দুই-বিট গ্রে-কোড ব্যবহার করে খোপগুলোকে নির্দিষ্ট করা হয়েছে।

তিন চলক কারনু ম্যাপ এর রাশিমালা সরলীকরণের নিয়ম নিচে দেয়া হলো–

- 1–এক একটি খোপকে তিন চলক রাশি দ্বারা নির্দিষ্ট করতে হবে।
- 2–দুটি সন্নিহিত খোপকে চলক রাশি দ্বারা নির্দিষ্ট করতে হবে।
- 3–চারটি সন্নিহিত খোপের সমষ্টিকে একক-চলক রাশি দ্বারা নির্দিষ্ট করতে হবে।

৮.২০ নং চিত্রে প্রথম নিয়মের জন্য একটি ম্যাপ দেখানো হলো ঃ

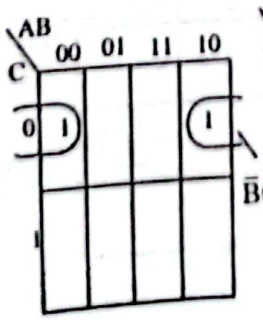


চিত্র ঃ ৮.২০

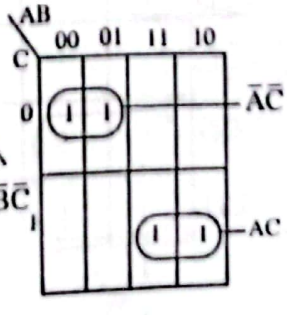
ম্যাপে তিনটি 1 এর পাশাপাশি অবস্থান নেই, সেজন্য খোপ তিনটি পৃথকভাবে পড়তে হবে। ম্যাপ হতে পঠিত রাশিমালা হলো–

$$\bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$$

আবার ৮.২১ (ক) নং চিত্রে দ্বিতীয় নিয়মের জন্য পাশাপাশি দু'টি খোপের কয়েকটি অবস্থান দেখানো হলো–



চিত্র ঃ ৮.২১ (ক)



চিত্র ঃ ৮.২১ (খ)