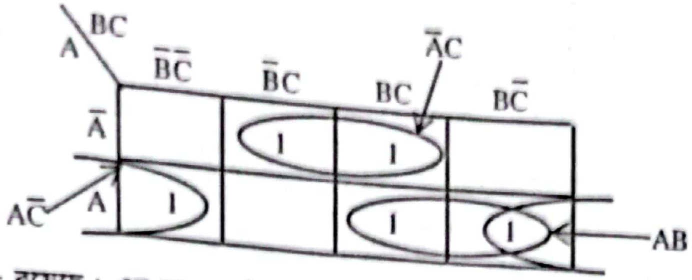
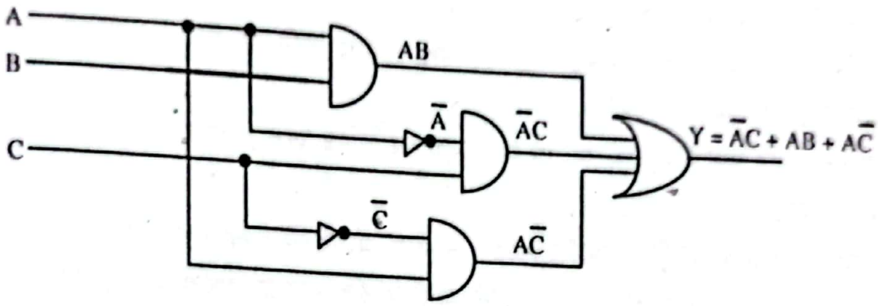
উদাহরণ-১৫। কারনু ম্যাপের সাহায্যে $Y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$ কে সরল করে লজিক বর্তনী আঁক।

সমাধান: রাশিমালার ম্যাপ নিচে দেয়া হলো–



প্রদত্ত K-ম্যাপের 4 টি Pair রয়েছে। এর মধ্যে দুটি অপ্রয়োজনীয় রয়েছে। এদের যে-কোনো একটি বাদ দেয়া যায়। অতএব, নির্ণেয় লজিক রাশিমালা $Y = \bar{A}C + AB + A\bar{C}$.

সরলীকৃত রাশিমালা হতে লজিক বর্তনী :



উদাহরণ-১৬। K-ম্যাপ ব্যবহার করে $Y = ABC\bar{D} + A\bar{B}D + AB\bar{C}\bar{D} + CD$ কে সরল কর ও লজিক বর্তনী ডিজাইন কর।

সমাধান: $Y = ABC\bar{D} + A\bar{B}D + AB\bar{C}\bar{D} + CD$

$= ABC\bar{D} + (A\bar{B}D).1 + (AB\bar{C}\bar{D}).1 + CD.1 \; [\because A.1 = A]$

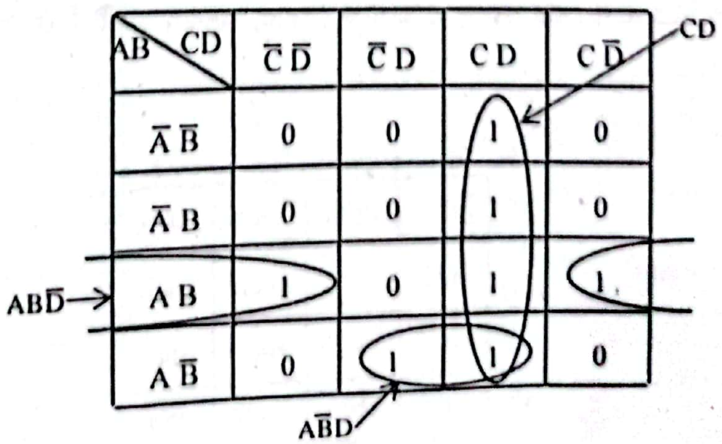
$= ABC\bar{D} + A\bar{B}D(\bar{C} + C) + AB\bar{C}\bar{D} + CD(\bar{A} + A) \; [\because A + \bar{A} = 1]$

$= ABC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD + AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}CD + ACD$

$= ABC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD + AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}CD(\bar{B} + B) + ACD(\bar{B} + B)$

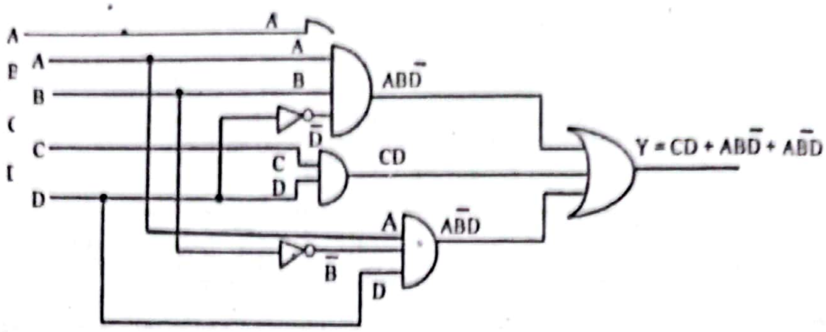
$= ABC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD + AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}BCD + A\bar{B}CD + ABCD$

ম্যাপে $ABC\bar{D}$ ও $AB\bar{C}\bar{D}$ সহজেই স্থাপন করা যায়। $A\bar{B}D$ প্রকৃতপক্ষে $\bar{A}BCD$ ও $ABC\bar{D}$ এর পেয়ার এবং CD প্রকৃতপক্ষে $\bar{A}\bar{B}CD$, $\bar{A}BCD$, ABCD ও $\bar{A}BCD$ এর কোয়াড নির্দেশ করে। এগুলো স্থাপন করলে ম্যাপটি নিম্নরূপ হবে–



অঙ্কিত K-ম্যাপে ১টি কোয়াড এবং ২টি পেয়ার রয়েছে। সুতরাং সরলীকৃত রাশিমালা, $Y = CD + AB\bar{D} + A\bar{B}D$

প্রাপ্ত সরলীকৃত সমীকরণ দ্বারা অঙ্কিত লজিক বর্তনী ঃ



কারনু ম্যাপ ব্যবহারের মাধ্যমে লজিক ফাংশন সরলীকরণ ঃ

পদ্ধতি ঃ

১। যে এক্সপ্রেশনকে সহজ ও সংক্ষিপ্ত করতে হবে, প্রথমে তার ট্রুথ টেবিল তৈরি করতে হবে।

২। ইনপুট বা পরিবর্তনশীল রাশির সংখ্যা অনুযায়ী কলাম এবং সারি আকারে 2^n সূত্র হিসাবমতো কতকগুলো ঘর করতে হবে, যাকে K-map বলা হয়।

৩। ট্রুথ টেবিলের যে-সব মান হাই (1), তাদের জন্য ম্যাপের নির্দিষ্ট ঘরে 1 বসাতে হবে।

৪। অন্যান্য সকল ঘরে 0 বসাতে হবে।

৫। ম্যাপে পাশাপাশি দুটি বা চারটি বা আটটি ঘরে 1 থাকলে এদের নিয়ে গ্রুপ করতে হবে।

৬। প্রাপ্ত গ্রুপে যে সমস্ত পরিবর্তনশীল রাশির মান অপরিবর্তিত রয়েছে অর্থাৎ যাদের মান 1 এবং 0 দুটিই নয়, তা সমন্বয়ে লজিক রাশি নির্ণয় করতে হবে। এটিই হবে সরলতম লজিক রাশি।

উদাহরণ-১৭।

A\B	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$
A	$A\overline{B}$	AB

দুই ভেরিয়েবলবিশিষ্ট ম্যাপ

A\BC	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	$\overline{A}B\overline{C}$
A	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$	ABC	$AB\overline{C}$

তিন ভেরিয়েবলবিশিষ্ট ম্যাপ

ম্যাপে পাশাপাশি দুটি 1 কে নিয়ে গ্রুপ তৈরি করলে ঐ গ্রুপকে পেয়ার, অনুরূপ চারটি নিয়ে গ্রুপ করলে তাকে কোয়াড আটটির গ্রুপকে অকটেট বলা হয়।

AB\CD	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$
$\overline{A}B$	$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}BC\overline{D}$
AB	$AB\overline{C}\,\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	ABCD	$ABC\overline{D}$
$A\overline{B}$	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A\overline{B}\,\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$

চার ভেরিয়েবলবিশিষ্ট ম্যাপ

A	B	Y	
0	0	0	
0	1	1	→ $\bar{A}B$
1	0	1	→ $A\bar{B}$
1	1	0	

ট্রুথ টেবিল

A \ B	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	0	0
A	1	1

ম্যাপ

● $Y = \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$ লজিক সমীকরণের ট্রুথ টেবিল ও কারনু ম্যাপ নিচে দেয়া হলো–

A	B	C	Y	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	→ $\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	→ $AB\bar{C}$
1	1	1	1	→ ABC

ট্রুথ টেবিল

AB \ C	$\bar{C}$	C	
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	
$\bar{A}B$	1	0	→ $B\bar{C}$
AB	1	1	→ AB
$A\bar{B}$	0	0	

ম্যাপ

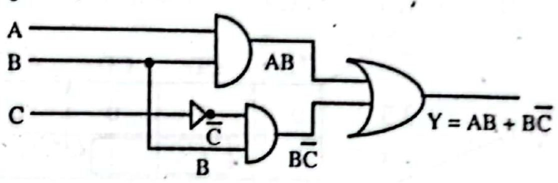
কারনু ম্যাপের সাহায্যে সরলীকরণ করে প্রাপ্ত সমীকরণ হবে, $Y = AB + B\bar{C}$

$\therefore Y = \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$

$= AB + B\bar{C}$

এখানে K ম্যাপ ব্যবহার করে লজিক রাশিমালা সরল করা হয়েছে।

সরলীকৃত রাশিমালার লজিক সার্কিট ঃ



● $Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}BCD + ABC\bar{D}$ লজিক সমীকরণ সরলীকরণে কারনু ম্যাপকে হাতিয়ার হিসেবে ব্যবহার করে দেখাও।

পদ্ধতি ঃ প্রথমে লজিক রাশিমালার ট্রুথ টেবিল তৈরি কর। ট্রুথ টেবিল থেকে কারনু ম্যাপ তৈরি করে ম্যাপ থেকে প্রাপ্ত সমীকরণই হচ্ছে সরলীকৃত সমীকরণের রূপ। নিচে সমীকরণের ট্রুথ টেবিল ও কারনু ম্যাপ দেওয়া হলো–

A	B	C	D	Y	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	→ $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	→ $ABC\bar{D}$
0	1	1	1	1	→ $\bar{A}BCD$
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	→ $ABC\bar{D}$
1	1	1	1	0	

ট্রুথ টেবিল

AB \ CD	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$	
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	0	0	
$\bar{A}B$	0	0	1	1	→ $\bar{A}BC$
AB	0	0	0	1	→ $BC\bar{D}$
$A\bar{B}$	0	0	0	0	

ম্যাপ

কারনু ম্যাপ থেকে সরলীকৃত প্রাপ্ত সমীকরণ দাঁড়ায় ঃ

$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}BCD + ABC\bar{D}$

$= \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC + BC\bar{D}$

এ ম্যাপে পৃথকভাবে গ্রুপ তৈরি করলে সমীকরণটি হবে,

$Y = AB\bar{C} + ABC$

$= AB(\bar{C} + C)\ [C + \bar{C} = 1]$

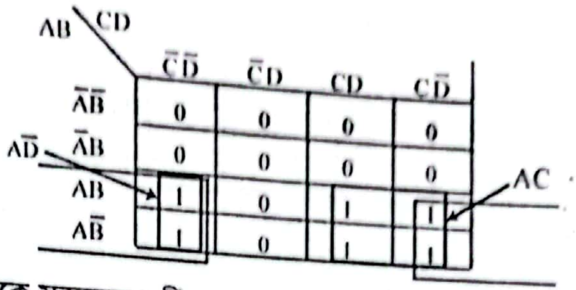
$= AB$

কিন্তু চারটির একটি গ্রুপ করলে তা আবার সরলীকরণ হয়ে পাওয়া যাবে, $Y = AB$

$\therefore Y = ABC\bar{D} + AB\bar{C}D + ABCD + ABC\bar{D}$ সমীকরণের সরলীকৃত রূপ হলো : $Y = AB$

উদাহরণ-২০ । $Y = AB\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + ABCD + ABC\bar{D} + A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D}$ সমীকরণকে কারনু ম্যাপে বসিয়ে সরল করলে পাওয়া যায়, $Y = AC + A\bar{D}$

নিচে দেখানো হলো :



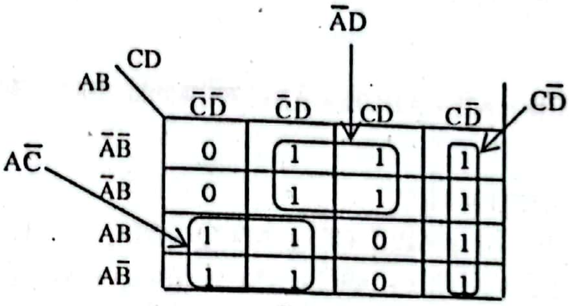
এই ম্যাপে দুটি Quad, দুটি Quad থেকে সরলকৃত সমীকরণ, $Y = AC + A\bar{D}$

উদাহরণ-২১ । $Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + \bar{A}BC\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + ABC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C\bar{D}$

সমীকরণটি কারনু ম্যাপে বসিয়ে সরল করলে দাঁড়ায়,

$Y = A\bar{C} + \bar{A}D + C\bar{D}$

নিচে সরলীকরণ পদ্ধতি দেখানো হলো :



এ ম্যাপে তিনটি গ্রুপ থেকে তিনটি মান পাওয়া যায়, ফলে সরলীকরণ সমীকরণ হবে,

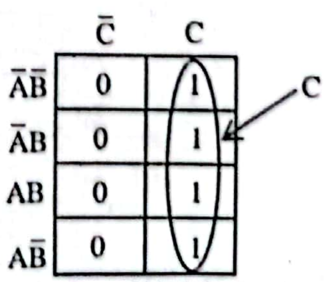
$Y = \bar{A}D + A\bar{C} + C\bar{D}$

$Y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC + A\bar{B}C$ সমীকরণটি কীভাবে K-ম্যাপের সাহায্যে সরলীকরণ করা যায়, তা নিচে দেখানো হলো–

প্রথমে সমীকরণটির পৃথক ট্রুথ টেবিল তৈরি করতে হবে, যা নিম্নরূপ–

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

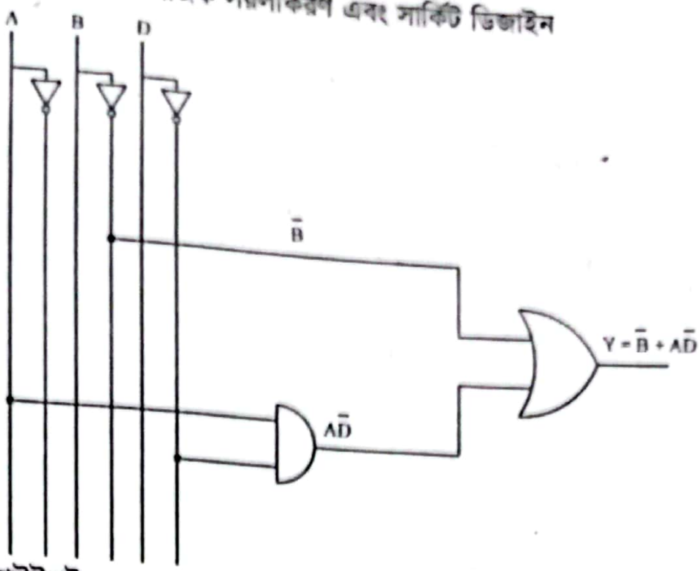
ট্রুথ টেবিল



K-ম্যাপ

সুতরাং উক্ত ম্যাপ থেকে পাওয়া যায়, $Y = C$

$\therefore Y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC + A\bar{B}C$ সমীকরণটি কারনু ম্যাপের সাহায্যে সরলীকরণ করলে দাঁড়ায়, $Y = C$.



K-ম্যাপ থেকে সরলীকৃত আউটপুট–

$Y = \bar{B} + A\bar{D}$

বুলিয়ান সমীকরণের সাহায্যে সমাধান ঃ

$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{C}\bar{D} + A\bar{B} + ABC\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C$

$= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{C}\bar{D} + ABC\bar{D} + A\bar{B}$

$= \bar{A}\bar{B}(\bar{C} + C) + A\bar{D}(\bar{C} + CB) + A\bar{B}$

$= \bar{A}\bar{B} + A\bar{B} + A\bar{D}(\bar{C} + B)$

$= \bar{B}(\bar{A} + A) + A\bar{D}\bar{C} + AB\bar{D}$ $[\bar{B} + BA\bar{D} = \bar{B} + A\bar{D}]$

$= \bar{B} + AB\bar{D} + A\bar{D}\bar{C}$

$= \bar{B} + A\bar{D} + A\bar{D}\bar{C}$

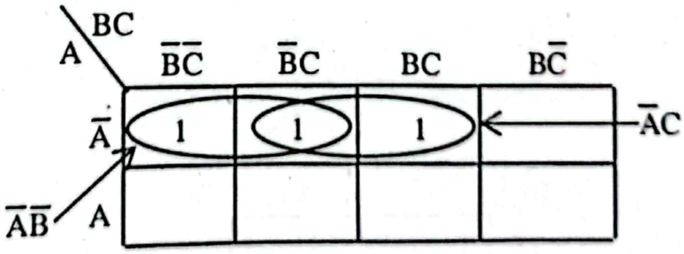
$= \bar{B} + A\bar{D}(1 + \bar{C})$ $[1 + \bar{A} = 1]$

$= \bar{B} + A\bar{D}$

উদাহরণ-২৩ । $Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC$ কে Karnaugh map এর মাধ্যমে Simplify করে লজিক বর্তনী আঁক ।

[বাকাশিবো-২০১০]

সমাধান ঃ রাশিমালার ম্যাপ নিচে দেওয়া হলো–



প্রদত্ত K-ম্যাপের 2 টি Pair রয়েছে। অতএব, নির্ণেয় লজিক রাশিমালা $Y = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}C$

সরলীকৃত রাশিমালা হতে লজিক বর্তনী ঃ