**প্রমাণ: A.M. ≥ G. M. ≥ H. M.**

ধরা যাক, $x_1$ ও $x_2$ দুটি অশূন্য ধনাত্বক রাশি।

$$\text{গাণিতিক গড় A.M.} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\text{জ্যামিতিক গড় G. M} = \sqrt{x_1\, x_2}.$$

$$\text{তরঙ্গ গড়, H. M.} = \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$$

যেহেতু $x_1$ ও $x_2$ দুটি ধনাত্বক রাশি, সুতরাং $\sqrt{x_1}$ ও $\sqrt{x_2}$ বাস্তব।

$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$ [∴ বাস্তব ।রাশির বর্গ ঋণাত্বক হতে পারে না]

$\Rightarrow (\sqrt{x_1})^2 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + (\sqrt{x_2})^2 \geq 0$

$\Rightarrow x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2}$

$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$

A.M. $\geq$ G. M.....(i)

আবার $\sqrt{x_1}$ ও $\sqrt{x_2}$ বাস্তব বলে $\frac{1}{\sqrt{x_1}}$ এবং $\frac{1}{\sqrt{x_2}}$ বাস্তব

$(\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}})^2 \geq 0$ [∴ বাস্তব ।রাশির বর্গ ঋণাত্বক হতে পারে না]

$\Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{x_1}})^2 - 2\frac{1}{\sqrt{x_1}}\frac{1}{\sqrt{x_2}} + (\frac{1}{\sqrt{x_1}})^2 \geq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq 2\frac{1}{\sqrt{x_1}}\frac{1}{\sqrt{x_2}}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}} \geq \frac{1}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\text{H.M}} \geq \frac{1}{\text{G. M}}$$

$$\Rightarrow \text{G. M} \geq \text{H. M} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\text{A.M.} \geq \text{G. M} \geq \text{H. M.}$$

$$\text{G. M} = \sqrt{x_1\, x_2}.$$

$$\text{H. M.} = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$$