প্রথম অধ্যায়

বলের সংযোজন ও বিভাজন

Understand the Composition and Resolution of Forces

১.০ বল

(Defination of Force)

যা কোন স্থির বস্তুর উপর কাজ করে বস্তুটিকে গতিশীল করে কিংবা করতে চায় অথবা গতিশীল বস্তুর উপর কাজ করে গতির পরিবর্তন করে কিংবা করতে চায় তাকে বল (Force) বলে। বল প্রয়োগে বস্তুর আকারও পরিবর্তিত হয় বা হতে চায়। বলকে দেখা যায় না, শুধু অনুভব করা যায়। বল এক প্রকার ভেক্টর রাশি। কারণ এর মান ও দিক উভয়ই বিদ্যমান।

সংজ্ঞা : বল এমন একটি বাহ্যিক কারণ যা কোনো একটি বস্তুর (স্থির বা গতিশীল) অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাবার চেষ্টা করে।

বলের পরিমাণগত সংজ্ঞা :

যা কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়া করে তার ত্বরণ সৃষ্টি করে বা করতে চায় তাকে বল বলে। বস্তুর ভর ও ত্বরণের গুণফল দ্বারা বল পরিমাপ করা হয়। অর্থাৎ,

$$\text{বল (F)} = \text{ভর (m)} \times \text{ত্বরণ (a)} = \text{ভর} \times \frac{\text{বেগ}}{\text{সময়}} = \text{ভর} \times \frac{\text{সরণ}}{\text{সময়}^2}$$

$$\text{ওজন (W)} = \text{ভর (m)} \times \text{মাধ্যাকর্ষণজনিত ত্বরণ (g)} = \text{ভর} \times \frac{\text{সরণ}}{\text{সময়}^2}$$

এস. আই. এককে ওজন এবং বল (শব্দ দুটি) সমার্থক। ওজন বা বল বলতে বুঝায়, বস্তুর ভর-এর উপর ত্বরণের ক্রিয়ার ফল। অর্থাৎ ভর (কেজি)-কে ত্বরণ বা g দ্বারা গুণ করলে বল বা ওজন হিসেবে নিউটন (N) পাওয়া যাবে।

১.১ বলের প্রভাব

(State the Effect of Forces)

পৃথিবীতে সকল কাজেই সংগঠিত হয় বলের প্রভাবে। নিম্নে বলের প্রভাবে সংগঠিত অবস্থাসমূহ উল্লেখ করা হলো :

(১) বল কোনো বস্তুর ইউনিফর্ম গতির অবস্থার পরিবর্তন ঘটাতে পারে।
(২) এটি স্থির বস্তুকে গতিশীল করতে পারে।
(৩) এটি বস্তুর মধ্যে পীড়ন বা Stress এর সৃষ্টি করতে পারে।
(৪) বস্তুর উপর ক্রিয়া করে বস্তুকে স্থির বা সাম্যাবস্থায় আনতে পারে।

১.২ বলের বৈশিষ্ট্য

(Mention the Characteristics of a Force)

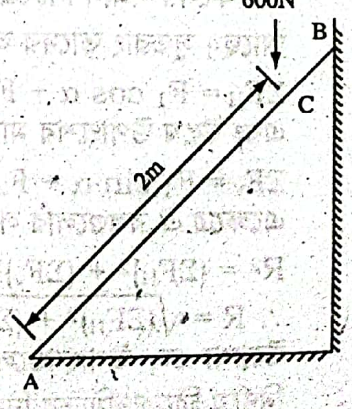
নিম্নলিখিত চারটি বৈশিষ্ট্যসমূহের দ্বারা বলকে চিহ্নিত করা যায়। যথা–

(১) **মান (Magnitude) :** বলের একটি নির্দিষ্ট মান থাকে। যেমন : 600 N, 50 kg, 200 lb ইত্যাদি।

(২) **প্রয়োগবিন্দু (Point of Application) :** বল একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যেমন : প্রয়োগ বিন্দু হচ্ছে C যা অ বিন্দু হতে 2m উপরে মইটির উপর অবস্থিত।

(৩) **ক্রিয়া রেখা (Line of Action) :** বল একটি নির্দিষ্ট ক্রিয়া রেখা বরাবর ক্রিয়া করে। যেমন : ক্রিয়া রেখা হচ্ছে ভার্টিক্যাল।

(৪) **দিক (Direction) :** বল নির্দিষ্ট দিকে ক্রিয়া করে। যেমন : এক্ষেত্রে দিক হচ্ছে ডাউনওয়ার্ড বা নিচের দিকে।



চিত্র : ১.১

Scanned with CamScanner

বিভাজন পদ্ধতিতে লব্ধি বল নির্ণয় :

এ পদ্ধতিতে একাধিক সমতলীয় বলের লব্ধি নির্ণয় করা সহজ।

(i) প্রথমে সমস্ত বলগুলোর লম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল (ΣV) নির্ণয় করতে হবে।
$\Sigma V = F_1 \sin \theta_1 + F_2 \sin \theta_2 + ...$

(ii) প্রদত্ত বলগুলোর অনুভূমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল (ΣH) নির্ণয় করতে হবে।
$\Sigma H = F_1 \cos \theta_1 + F_2 \cos \theta_2 + ...$

(iii) লব্ধিবল, $R = \sqrt{(\Sigma V)^2 + (\Sigma H)^2}$ নির্ণয় করতে হবে।

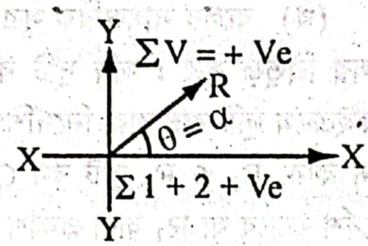
(iv) অনুভূমিকের সাথে লব্ধি বলের হেলানো কোণ (θ) নির্ণয় করতে হবে।

(v) লব্ধিবলের প্রকৃত কোণ α নির্ণয় করতে হবে।

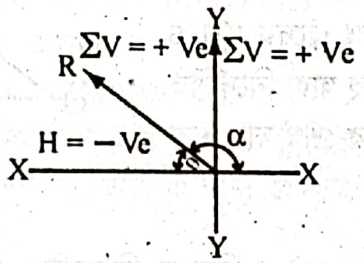
প্রকৃত কোণ (α) নির্ণয় পদ্ধতি :

(ক) যদি ΣV এবং ΣH উভয়ের মান যোগবোধক (+ Ve) হয়। তবে লব্ধিবল প্রথম চতুর্ভাগে হবে। এক্ষেত্রে $\theta = \alpha$ হবে।

(খ) যদি ΣV এর মান (+Ve) এবং ΣH এর মান বিয়োগবোধক (–Ve) হয়, তবে লব্ধিবল দ্বিতীয় চতুর্ভাগে হবে। এক্ষেত্রে, $\alpha = 180 - \theta$ হবে।

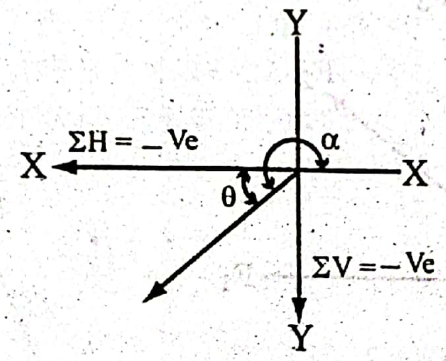


চিত্র : ১.৫



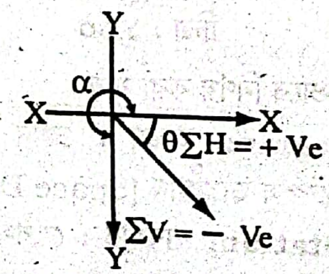
চিত্র : ১.৬

(গ) যদি ΣV এবং ΣH উভয়ের মান (–Ve) হয়। তবে লব্ধিবল তৃতীয় চতুর্ভাগে হবে। এক্ষেত্রে $\alpha = 180 + \theta$ হবে।



চিত্র : ১.৭

(ঘ) যদি ΣV এর মান (– Ve) এবং ΣH এর মান (+ Ve) হয়। তবে লব্ধিবল চতুর্থ চতুর্ভাগে হবে। এক্ষেত্রে $\alpha = 360 - \theta$ হবে।



চিত্র : ১.৮

Scanned with CamScanner

টেকনিক্যাল প্রকাশনী টেকনিক্যাল প্রকাশনী টেকনিক্যাল প্রকাশনী টেকনিক্যাল প্রকাশনী

টেকনিক্যাল প্রকাশনী টেকনিক্যাল প্রকাশনী টেকনিক্যাল প্রকাশনী টেকনিক্যাল প্রকাশনী

১.৪ লব্ধি বল নির্ণয়ে লেখচিত্র ও বৈশ্লেষাত্মক পদ্ধতি (Find the Resultant Force Graphically and Analytically)

লব্ধি বল নির্ণয়ের জন্য সাধারণত নিম্নলিখিত পদ্ধতিগুলো ব্যবহৃত হয়।

(১) লেখচিত্র পদ্ধতি (Graphical Method)

(ক) বলের ত্রিভুজ সূত্র (Triangle Law of Forces)

(খ) বলের বহুভুজ সূত্র (Polygonal Law of Forces)

(গ) ভেক্টর পদ্ধতি (Vectors Method)

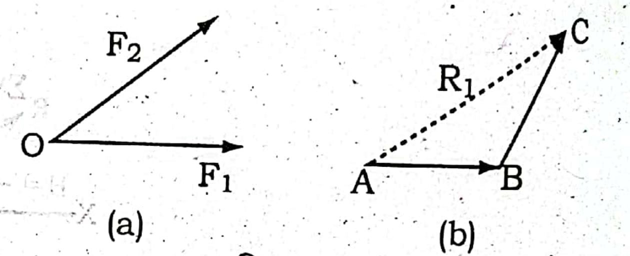
(২) বিশ্লেষাত্মক পদ্ধতি (Analytical Method)

(ক) বিশ্লেষণ বা বিভাজন পদ্ধতি (Method of Resolution)

(খ) বলের সামন্তরিক সূত্র (Parallelogram Law of Forces)

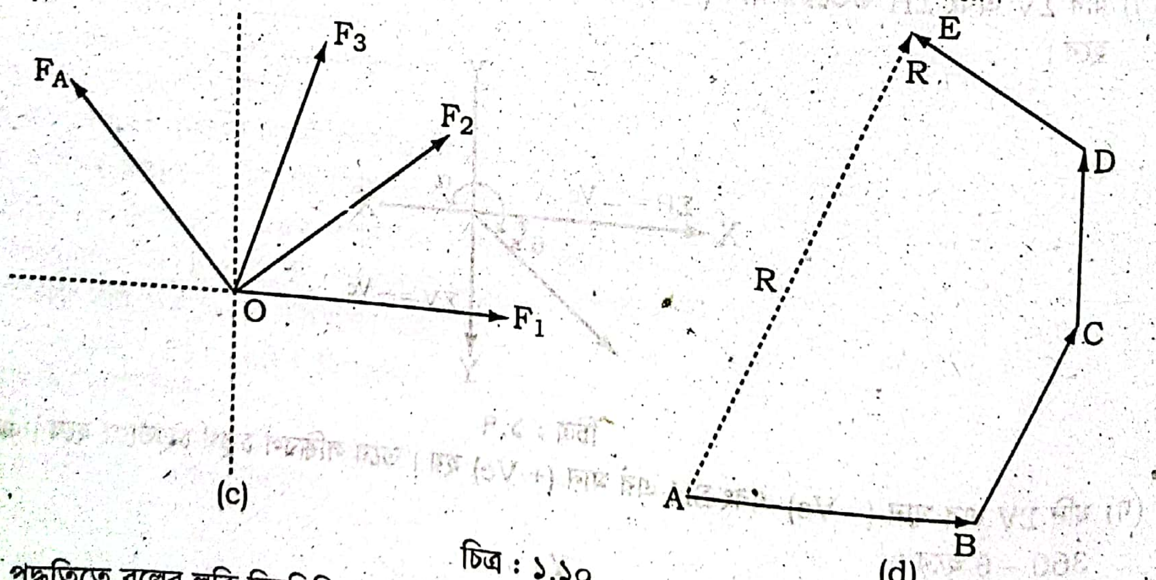
বলের ত্রিভুজ সূত্র : যদি দুটি বল কোনো একটি বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল হয় এবং এ দুটি বল কোনো ত্রিভুজের একইক্রমে দুটি বাহু দ্বারা নির্দেশিত হয় তবে এদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু দ্বারা বিপরীতক্রমে নির্দেশিত হবে। মনে করি, F_1 ও F_2 দুটি বল O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। AB নির্দেশ করে F_1 এবং BC নির্দেশ করে F_2 এর লব্ধি নির্দেশ করবে যা R_1 দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে।

বলের বহুভুজ সূত্র : যদি কতকগুলো বল কোনো একটি বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল হয় এবং এদের মান ও দিক একইক্রমে একটি বহুভুজের বাহু দ্বারা নির্দেশিত হয় তবে এদের লব্ধিবল ঐ বহুভুজের শেষ বাহু দ্বারা বিপরীতক্রমে নির্দেশিত হবে।



চিত্র : ১.৯

মনে করি, F_1, F_2, F_3 এবং F_4 বলগুলো O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। চিত্রানুযায়ী, F_1, F_2, F_3 ও F_4 যথাক্রমে AB, BC, CD ও DE নির্দেশ করে। সুতরাং ABCDE বহুভুজের AE বরাবর লব্ধি নির্দেশ করে।



চিত্র : ১.১০

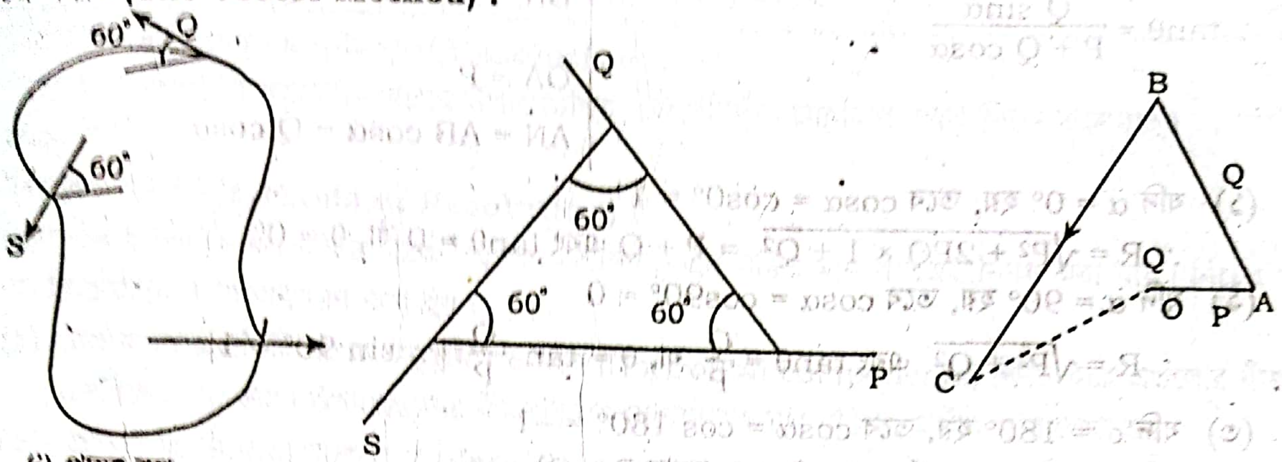
ভেক্টর পদ্ধতিতে বলের লব্ধি নিম্নলিখিতভাবে নির্ণয় করা যায়।

(১) স্পেস ডায়াগ্রাম (Space Diagram) অঙ্কন : কোন বস্তুর ক্রিয়াশীল বলগুলোর ক্রিয়ারেখা বরাবর সহজভাবে স্কেলে অঙ্কিত চিত্রকে স্পেস ডায়াগ্রাম (Space Diagram) বলে।

(২) বো-এর নোটেশন (Bow's Notation) ব্যবহার : স্পেস ডায়াগ্রামে প্রদর্শিত সকল বলগুলোকে বো-এর নোটেশনের সাহায্যে নামকরণ করা হয়। এ পদ্ধতিতে প্রত্যেক বলকে দুটি বড় হাতের অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়।

Scanned with CamScanner

ভেক্টর পদ্ধতি (The Vector Method) :



(i) প্রদত্ত বল (ii) স্পেস ডায়াগ্রাম (iii) ভেক্টর ডায়াগ্রাম

চিত্র : ১.১১

ভেক্টর ডায়াগ্রাম (Vector Diagram) বা ফোর্স ডায়াগ্রাম অঙ্কন :

(ক) প্রথমে সুবিধামত একটি বিন্দু O নিই তারপর স্পেস ডায়াগ্রামের P বলের সমান ও সমান্তরাল করে সুবিধামত স্কেলে একটি রেখা OA অঙ্কন করতে হবে।

(খ) OA রেখার শেষ বিন্দু হতে Q বলের সমান ও সমান্তরাল করে AB রেখা অঙ্কন করতে হবে।

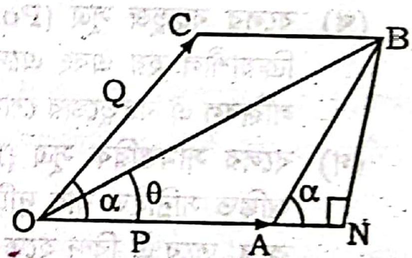
(গ) AB রেখার শেষ বিন্দু হতে S বলে সমান ও সমান্তরাল করে BC রেখা অঙ্কন করতে হবে।

(ঘ) CO যোগ করতে হবে। এভাবেই ভেক্টর ডায়াগ্রাম অঙ্কন করা হয়।

বলের সামান্তরিক সূত্র : কোন সামান্তরিকের একই বিন্দু হতে অঙ্কিত সন্নিহিত বাহু দুটি যদি কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি বলের মান ও দিক নির্দেশ করে, তবে ঐ বিন্দু হতে অংকিত সামন্তরিকের কর্ণই এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

প্রমাণ : মনে করি O বিন্দুতে দুইটি বল P এবং Q, α কোণে ক্রিয়া করছে। OA এবং OC রেখা দুইটি যথাক্রমে P এবং Q বলের মান ও দিক নির্দেশ করছে।

OABC সামন্তরিকটি অঙ্কন করি এবং OB যুক্ত করি। তা হলে OB কর্ণই বল দুটির লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে। এখন B বিন্দু হতে OA- এর বর্ধিত অংশের উপর BN লম্ব টানি যা বর্ধিত OA বাহুকে N বিন্দুতে ছেদ করল।



চিত্র : ১.১২

লব্ধির মান নির্ণয় :

OBN সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$$OB^2 = ON^2 + BN^2 = (OA + AN)^2 + BN^2$$
$$= OA^2 + 2OA.AN + AN^2 + BN^2$$
$$= OA^2 + 2OA.AN + AB^2$$

[$\because \Delta ABN$- এ $AB^2 = AN^2 + BN^2$]

চিত্র হতে পাই,

$OB = R$

$OA = P$

$AB = OC = Q$

$AN = AB\cos\alpha = Q\cos\alpha$

সুতরাং $R^2 = P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2$

$$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

লব্ধির দিক নির্ণয় : মনে করি, লব্ধি R, P বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করছে।

অতএব OBN সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই

$$\tan\theta = \frac{BN}{ON} = \frac{BN}{OA + AN}$$

চিত্র হতে,

Scanned with CamScanner

$\therefore \tan\theta = \dfrac{Q \sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

$BN = AB \sin\alpha = Q \sin\alpha$

$OA = P$

$AN = AB \cos\alpha = Q \cos\alpha$

(১) যদি $\alpha = 0°$ হয়, তবে $\cos\alpha = \cos 0° = 1$

$\therefore R = \sqrt{P^2 + 2PQ \times 1 + Q^2} = P + Q$ এবং $\tan\theta = 0$ বা, $\theta = 0°$

(২) যদি $\alpha = 90°$ হয়, তবে $\cos\alpha = \cos 90° = 0$

$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ এবং $\tan\theta = \dfrac{Q}{P}$ বা, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{Q}{P}$ [$\because \sin 90° = 1$]

(৩) যদি c $= 180°$ হয়, তবে $\cos\alpha = \cos 180° = -1$

$\therefore R = (P \sim Q)$ অর্থাৎ $R = P - Q$ [যখন $P > Q$]

এবং $R = Q - P$ [যখন $Q > P$]

$\tan\theta = 0$ বা, $\theta = 0°$ অথবা $180°$

১.৫ বলের সূত্রসমূহ
(Write the Laws of Forces)

যে বল ব্যবস্থায় সাধারণ নিয়মে লব্ধি বলের মান নির্ণয় করা যায়, তাকে বলের সাধারণ সূত্র (General Law) বলে।

বলের সাধারণ সূত্রগুলো হলো–

(ক) **বলের ত্রিভুজ সূত্র (Triangle Law of Forces) :** যদি দুটি বল কোনো একটি বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল হয় এবং এ দুটি বল কোনো ত্রিভুজের একইক্রমে দুটি বাহু দ্বারা নির্দেশিত হয় তবে এদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু দ্বারা বিপরীতক্রমে নির্দেশিত হবে।

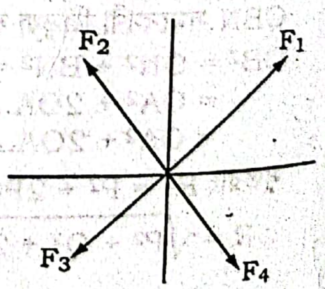
(খ) **বলের বহুভুজ সূত্র (Polygon Law of Forces) :** যদি কতকগুলো বল কোনো একটি বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল হয় এবং এদের মান ও দিক একইক্রমে একটি বহুভুজের বাহু দ্বারা নির্দেশিত হয় তবে এদের লব্ধিবল ঐ বহুভুজের শেষ বাহু দ্বারা বিপরীতক্রমে নির্দেশিত হবে।

(গ) **বলের সামন্তরিক সূত্র (Parallelogram Law of Forces) :** কোন সামন্তরিকের একই বিন্দু হতে অঙ্কিত সন্নিহিত বাহু দুটি যদি কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুইটি বলের মান ও দিক নির্দেশ করে, তবে ঐ বিন্দু হতে অংকিত সামন্তরিকের কর্ণই এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

১.৬ বল বিশ্লেষণের বা বিভাজনের নীতি
(State the Principle of Resolution of Force)

কোনো বস্তুর উপর বলের প্রভাব পরিবর্তন না করে প্রদত্ত বলকে একাধিক কম্পোনেন্টে বের করার প্রক্রিয়াকে বলের বিশ্লেষণ/বিভাজন বলে।

নির্দিষ্ট দিকে এক বা একাধিক বলের কম্পোনেন্টগুলোর বীজগাণিতিক যোগফল একই দিকে উক্ত বল বা বলগুলোর লব্ধির কম্পোনেন্টের সমান।



চিত্র : ১.১৩

মনে করি, F_1, F_2 F_3............ ইত্যাদি বলের লব্ধি R হয় তবে বিশ্লেষণের নীতি অনুসারে আমরা পাই–

$\Sigma R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$ ....

এখানে, R_x = x অক্ষ বরাবর উপাংশের যোগফল।

অনুরূপভাবে,

$\Sigma R_y = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$ ....

এখানে, R_y = y অক্ষ বরাবর উপাংশের যোগফল।

বল প্রভাবাধীন কোনো বস্তুর উপর বলের প্রভাব অপরিবর্তিত রেখে প্রদত্ত বলকে একাধিক অংশে পৃথক করার প্রক্রিয়াকে বলের বিশ্লেষণ বলে। বিশ্লেষণ করা অংশদ্বয়কে এক একটি উপাংশ বা (Component) বলে।

বিশ্লেষণের নীতি (Principles of Resolution) :

"নির্দিষ্ট দিকে দুই বা ততোধিক বলের উপাংশগুলির বীজ গণিতীয় যোগফল একই দিকে বলসমূহের লব্ধির উপাংশের সমান।"

বিশ্লেষণ পদ্ধতি (Methods of Resolution) :

ক্রিয়াশীল সমতলীয় বল ব্যবস্থা হতে বিশ্লেষণ প্রণালিতে এর লব্ধির মান সহজেই নির্ণয় করা যায়। নিচের ধাপসমূহ বল বিশ্লেষণের সময় অনুসরণ করা হয় :

(১) বল ব্যবস্থার প্রতিটি বলের অনুভূমিক উপাংশ (Horizontal components) নির্ণয় করে এগুলোর বীজগণিতীয় যোগফল বের করা। উপাংশগুলোর বীজগণিতীয় যোগফলকে ΣH বা ΣF_x প্রতীক দ্বারা লেখা হয়।

(২) প্রতিটি বলের খাড়া বা লম্বাংশ (Veritical component) নির্ণয় করে এগুলোর বীজগণিতীয় যোগফল নির্ণয় বের করা। একে ΣF বা ΣF_y প্রতীক দ্বারা লেখা হয়।

(৩) প্রদত্ত বল ব্যবস্থার লব্ধি R নির্ণয়ের জন্য নিচের সূত্র প্রয়োগ করা :

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$$

(৪) লব্ধির দিক (Direction) অর্থাৎ R এবং $\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$ এর মধ্যবর্তী কোণ (Angle) α নির্ণয়ের জন্য নিচের সূত্র প্রয়োগ করা :

$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} \text{ or } \frac{\Sigma V}{\Sigma H}$$

একটি নির্দিষ্ট দিকে একাধিক বলের উপাংশগুলো বীজগাণিতীয় যোগফল সর্বদা উক্ত দিকে ঐ বলগুলোর লব্ধি বলের উপাংশের সমান হয়।

প্রমাণ :

মনে করি, OA এবং OB দুটি রেখা পরস্পর O বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের মান ও দিক সূচিত করছে। OA এবং OB এর সাহায্যে OACB সামান্তরিক অঙ্কন করি। সামন্তরিকের কর্ণ OC বল দুটির লব্ধির মান (R) নির্দেশ করবে।

মনে করি, OX রেখাটি বল বিশ্লেষণের নির্দিষ্ট দিক নির্দেশ করছে। OX এর উপর AL, BM এবং CN যথাক্রমে A, B এবং C বিন্দু হতে লম্ব টানি। অনুরূপভাবে CN এর উপর A বিন্দু হতে AT লম্ব টানি। ত্রিভুজ OBM এবং ACT এর বাহু OB ও AC সমান এবং সমান্তরাল। অধিকন্তু বাহু OM এবং AT সমান্তরাল।

∴ OM = AT = LN

চিত্র হতে পাই–

P এবং Q বলের লব্ধি R হলে

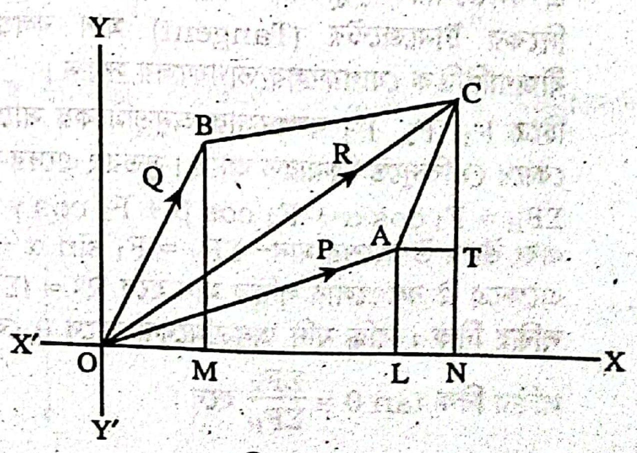
OX এর দিকে Q বলের উপাংশ = OM

OX এর দিকে P বলের উপাংশ = OL

OX এর দিকে R লব্ধি বলের উপাংশ = ON

∴ ON = OL + LN = OL + OM (∵ LN = OM)

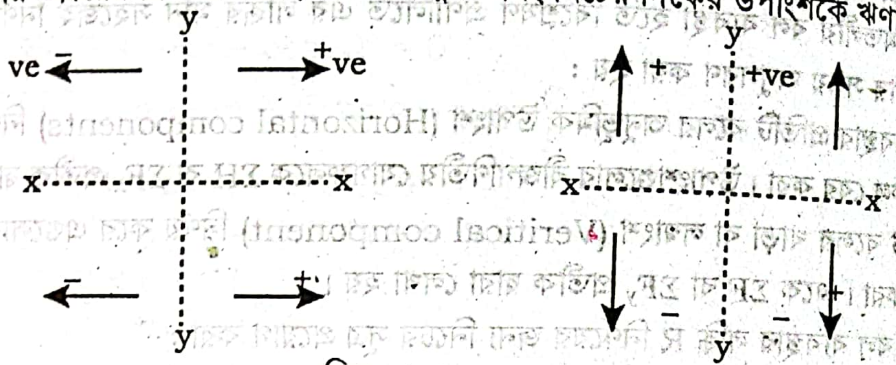
সুতরাং OX এর দিকে R বলের উপাংশ =OX এর দিকে P বলের উপাংশ + OX এর দিকে Q বলে উপাংশ অর্থাৎ নির্দিষ্ট দিকে একাধিক বলের উপাংশসমূহের যোগফল, উক্ত দিকে লব্ধি বলের উপাংশের সমান হবে।



চিত্র : ১.১৪

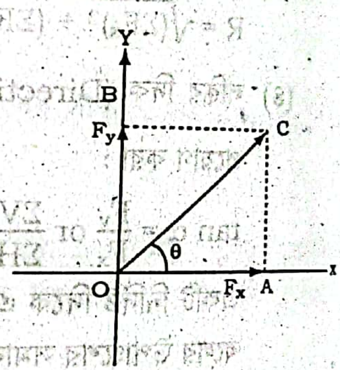
১.৭ উপাংশ নির্ণয়ের পদ্ধতি
(Express the Deduction of the Formula for Finding the Resolved Part of a Component)

(ক) উপাংশের চিহ্নরীতি (Sign convention of component of forces) : অনুভূমিক উপাংশের ক্ষেত্রে লম্ব রেখার ডান দিকে প্রসারিত উপাংশকে ধনাত্মক এবং বাম দিকের উপাংশকে ঋণাত্মক ধরা হয়। লম্ব উপাংশের ক্ষেত্রে অনুভূমিক রেখার উপরের দিকের উপাংশকে ধনাত্মক এবং নিচের দিকের উপাংশকে ঋণাত্মক ধরা হয়।



চিত্র : ১.১৫

(খ) উপাংশ নির্ণয় পদ্ধতি (Methods of find out the components) :
প্রদত্ত বলটিকে দুইটি উপাংশে বিভক্ত করি যারা পরস্পর লম্ব।
নিম্ন চিত্রে বল F কে x অক্ষ বরাবর এবং y অক্ষ বরাবর উপাংশে বিভক্ত করি।
এখানে $ox = oA = F_x = F$ বলের অনুভূমিক উপাংশ
এবং $oy = oB = F_y = F$ বলের উল্লম্ব উপাংশ



চিত্র : ১.১৬

চিত্রানুযায়ী, $\cos\theta = \frac{OA}{OC}$ এবং $\sin\theta = \frac{AC}{OC}$

বা, $\cos\theta = \frac{F_x}{F}$ বা, $\sin\theta = \frac{F_y}{F}$

$\therefore F_x = F\cos\theta$ $\therefore F_y = F\sin\theta$

১.৮ লেখচিত্র ও বৈশ্লেষিক পদ্ধতিতে লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয়
(Find the Magnitude and Position of the Resultant Force Graphically and Analytically)

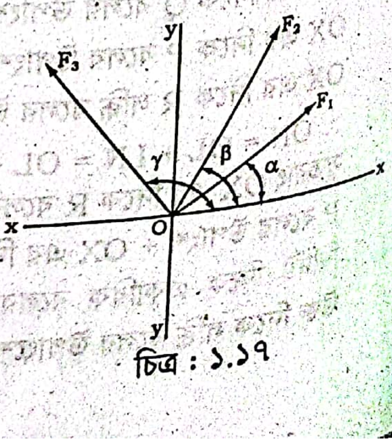
লব্ধি বলের মান ও দিক বৈশ্লিষিক এবং লেখচিত্র পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায়। লব্ধি বলের অবস্থান বলতে বুঝায় যে বিন্দু দিয়ে লব্ধি বল অগ্রসর হবে। লব্ধি বলের অবস্থান দুই পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায়। যেমন–
(ক) বৈশ্লেষিক পদ্ধতি (Analytical Method)
(খ) লেখচিত্র পদ্ধতি (Graphical Method)

(ক) বৈশ্লেষিক পদ্ধতি (Analytical Method)

(i) একাধিক বলের লব্ধি নির্ণয় : একাধিক বল যখন কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধির বর্গের মান ঐ বলগুলোর অনুভূমিক উপাংশ ও উল্লম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফলের বর্গের যোগফলের সমান এবং লব্ধির দিকের টানজেন্টের (Tangent) মান বলগুলোর উল্লম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক ও অনুভূমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফলের ভাগফলের সমান।

চিত্রে F_1, F_2, F_3 বলগুলোর অনুভূমিকের সাথে যথাক্রমে α, β এবং γ কোণে O বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। সুতরাং এদের অনুভূমিক উপাংশের মান–
$\Sigma F_H = F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma$
এবং উল্লম্ব উপাংশের মান– $\Sigma F_V = F_1\sin\alpha + F_2\sin\beta + F_3\sin\gamma$
এক্ষেত্রে ঐ বলগুলোর লব্ধির মান হবে $R^2 = (\Sigma F_H)^2 + (\Sigma F_V)^2$

লব্ধির দিক : লব্ধি যদি অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ক্রিয়া করে তা হলে লব্ধির দিক $\tan\theta = \frac{\Sigma F_V}{\Sigma F_H}$ হবে।



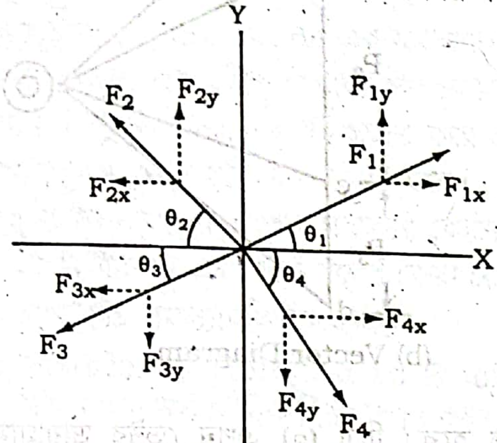
চিত্র : ১.১৭

(ii) বিশ্লেষণ পদ্ধতি

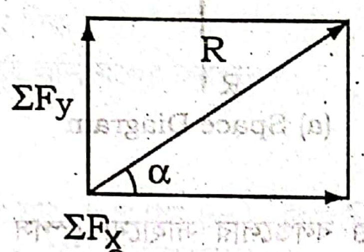
(Method of Resolution)

বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে কোন বিন্দুতে ক্রিয়ার কতকগুলো বলের মান ও দিক নিচের প্রদত্ত ধাপে নির্ণয় করা হয়। মনে করি,

F_1, F_2, F_3 এবং F_4 যা নিচের চিত্রে দেখানো হয়েছে।
এই চারটি বলের সিস্টেম হতে লব্ধি বল নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র : ১.১৮



চিত্র : ১.১৯

স্টেপ-১ : x ও y অক্ষ বরাবর সকল বলগুলোর উপাংশ বের করতে হবে যা উপরের চিত্রের (a) তে দেখানো হয়েছে।

স্টেপ-২ : x ও y অক্ষ বরাবর বলগুলোর বীজগণিতীয় যোগফল বের করতে হবে।

$\Sigma F_x = F_{1x}\cos\theta_1 + F_{2x}\cos\theta_2 + F_{3x}\cos\theta_3 + F_{4x}\cos\theta_4$

$\Sigma F_y = F_{1y}\sin\theta_1 + F_{2y}\sin\theta_2 + F_{3y}\sin\theta_3 + F_{4y}\sin\theta_4$

[N.B. উপরোক্ত ক্ষেত্রে F_{2x}, F_{3x}, F_{3y} এবং F_{4y} নেগেটিভ চিহ্ন বা মান হবে]

স্টেপ-৩ : বলগুলোর লব্ধির মান নির্ণয়ের জন্য নিচের সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

$R = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$

স্টেপ-৪ : লব্ধির দিক নির্ণয়ের নিচের সূত্রটি প্রয়োগ করতে হবে।

x অক্ষের সাথে লব্ধির দিক হচ্ছে, $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}\right)$

বিকল্প পদ্ধতি বিভাজন (Resolution) পদ্ধতিতে লব্ধি বল নির্ণয় : এ পদ্ধতিতে একাধিক সমতলীয় বল (coplanar force) এর লব্ধি নির্ণয় করা সহজ।

(১) প্রথমে সমস্ত বলগুলোর উল্লম্ব উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল নির্ণয় করতে হবে।

(২) সমস্ত বলগুলোর অনুভূমিক উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল নির্ণয় করতে হবে।

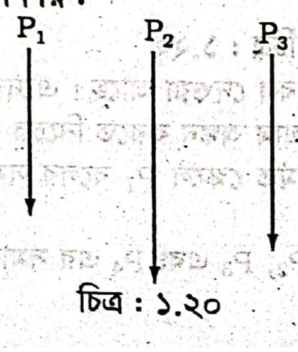
(৩) লব্ধি বল, $R = \sqrt{(\Sigma F_H)^2 + (\Sigma F_V)^2}$ নির্ণয় করতে হবে।

(৪) অনুভূমিকের সাথে লব্ধিবলের হেলানো (inclined) কোণ নির্ণয় করতে হবে। অর্থাৎ $\tan\theta = \frac{\Sigma F_V}{\Sigma F_H}$

(৫) লব্ধি বলের প্রকৃত কোণ α নির্ণয় করতে হবে।

(খ) **লেখচিত্র পদ্ধতি (Graphical Method) :** নিচে লেখচিত্র পদ্ধতিতে সমান্তরাল এবং অসমান্তরাল বলসমূহের লব্ধির অবস্থান নির্ণয় করে দেখানো হলো :

(i) সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি ও অবস্থান নির্ণয় :



চিত্র : ১.২০

Scanned with CamScanner

(৩) ac যোগ করি, যা লব্ধি বলের মান ও দিক নির্দেশ করবে।

(৪) সুবিধামত বিন্দু O নিতে হবে এবং oa, ob, oc এবং od যোগ করতে হবে।

(৫) স্পেস ডায়াগ্রামের উপর, P_1, P_2, P_3 এবং P_4 বলের ক্রিয়া রেখাগুলোকে বর্ধিত করতে হবে।

(৬) P_1 বলের ক্রিয়া রেখার উপর যেকোন বিন্দু P_1 নিতে হবে। এ P_1 বিন্দু দিয়ে oa এর সমান্তরাল করে LP, অঙ্কন করতে হবে। অতঃপর ob এর সমান্তরাল করে P_1P_2 অঙ্কন করতে হবে, যা P_2 ক্রিয়া রেখার উপর P_2 বিন্দুতে ছেদ করল।

(৭) অনুরূপভাবে oc, od এবং oe এর সমান্তরাল করে P_2P_3, P_3P_4 এবং P_4M অঙ্কন করতে হবে।

(৮) LP এবং MP_4 এর বর্ধিত রেখাদ্বয় পরপর P বিন্দুতে ছেদ করলে।

(৯) এখন P বিন্দু দিয়ে ca এর সমান্তরাল করে একটি রেখা অঙ্কন করি। যা লব্ধি বলের অবস্থান নির্দেশ করবে।

(১০) পরিমাণপূর্বক ac ই লব্ধি বলের মান হবে।

(১১) অনুভূমিকের সাথে ae রেখার মধ্যকার কোণের পরিমাপই বলে লব্ধির দিক।

(১২) P_1 এর ক্রিয়ারেখা এবং লব্ধি বলের ক্রিয়া রেখার মধ্যকার দূরত্বই হবে লব্ধি বলের অবস্থান।

১.৯ লব্ধি বল সম্পর্কিত সমস্যাবলির সমাধান
(Solve Problems Related to Resultant Force)

উদাহরণ - ১। লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় কর : যখন, $\Sigma F_V = 250$ kg এবং $\Sigma F_H = 3.25$ kg। *[বাকাশিবো : '০৮]*

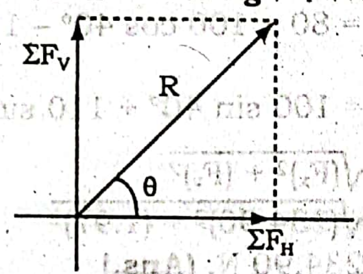
সমাধান : $R = \sqrt{(\Sigma F_V)^2 + (\Sigma F_H)^2}$

$= \sqrt{(250)^2 + (3.25)^2}$

$= 250.02$ Kg

$\tan\theta = \frac{\Sigma F_v}{\Sigma F_H} = \frac{250}{3.25} = 76.92$

$\theta = \tan^{-1}(76.9) = 89.25°$ **Ans.**



চিত্র : ১.২৩

উদাহরণ - ২। নিচের চিত্রে প্রদর্শিত বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো : '০৭]*

সমাধান : বলগুলো x এবং y উপাংশে বিশ্লেষণ করি।

$\overset{\rightarrow}{+}\ \Sigma F_x = 125\cos 45° - 500\cos 60° - 400$

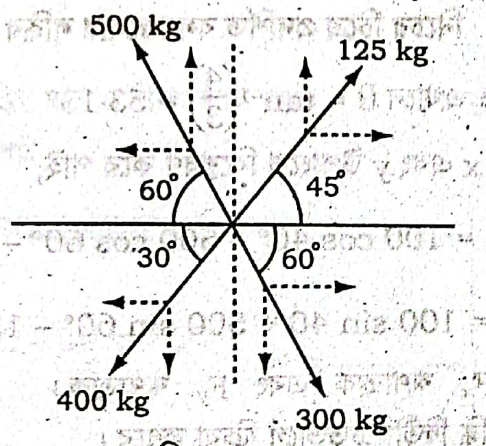
$\cos 30° + 300\cos 60°$

$= -358.02$

$+\uparrow\ \Sigma F_y = 125\sin 45° + 500\sin 60° - 400$

$\sin 30° - 300\sin 60°$

$= 61.59$



চিত্র : ১.২৪

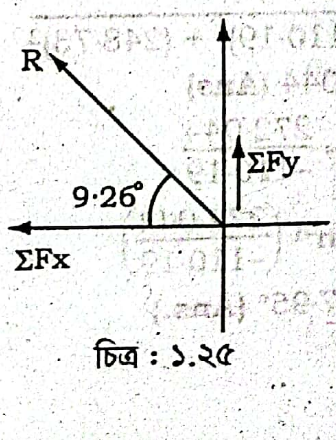
$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} = \sqrt{(-358.02)^2 + (61.59)^2}$

$= 363.28$ Kg.

$\tan\alpha = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = -\frac{61.59}{358.02}$

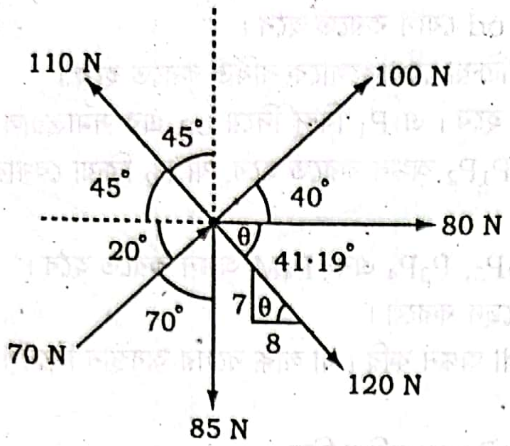
$\alpha = \tan^{-1}(-0.172)$

$= -9.76°$ (পশ্চিম-উত্তর) **(Ans.)**

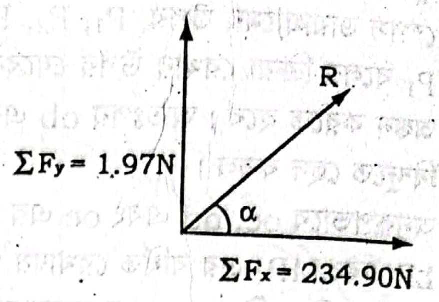


চিত্র : ১.২৫

উদাহরণ - ৩। নিচের চিত্র অনুযায়ী ক্রিয়ারত বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। [বাকাশিবো : '১১,'১৫]



চিত্র : ১.২৬



চিত্র : ১.২৭

সমাধান : বলগুলো x ও y উপাংশে বিশ্লেষণ করি।

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{7}{8}\right) = 41.19°$

$\overset{\rightarrow}{+} \Sigma F_x = 80 + 100 \cos 40° - 110 \cos 45° + 70 \cos 20° + 120 \cos 41.19° = 234.90$ N.

$\overset{\uparrow}{+} \Sigma F_y = 100 \sin 40° + 110 \sin 45° + 70 \sin 20° - 85 - 120 \sin 41.19° = 1.97$ N.

$\therefore R = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$

$= \sqrt{(234.90)^2 + (1.97)^2}$

$= 234.90$ N. **(Ans.)**

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1.97}{234.90}\right) = 0.48°$ **(Ans.)**

উদাহরণ - ৪। নিচের চিত্রে প্রদর্শিত বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। [বাকাশিবো : '১০]

সমাধান : এখানে $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53{\cdot}13°$

বলগুলো x এবং y উপাংশে বিশ্লেষণ করে পাই,

$\overset{\rightarrow}{+} \Sigma F_x = 100 \cos 40° - 500 \cos 60° - 150 \cos 53{\cdot}13° + 200 \cos 40° = -10{\cdot}19$ kg

$\overset{\uparrow}{+} \Sigma F_y = 100 \sin 40 + 500 \sin 60° - 150 \sin 53{\cdot}13° - 200 \sin 40° = 248{\cdot}73$ kg

যেহেতু F_x ঋণাত্মক এবং F_y ঋণাত্মক। সেহেতু লব্ধি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে ক্রিয়া করবে।

$\therefore R = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$

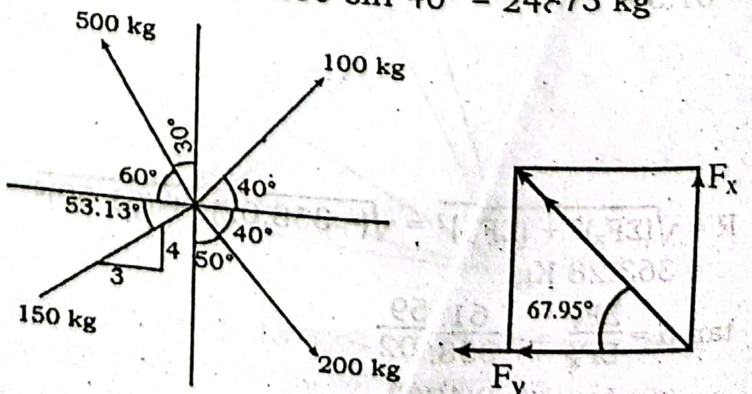
$= \sqrt{(-110{\cdot}19)^2 + (248{\cdot}73)^2}$

$= 272{\cdot}044$ **(Ans)**

$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{272{\cdot}044}{-110{\cdot}19}$

$\therefore \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{272{\cdot}044}{-110{\cdot}19}\right)$

$= -67{\cdot}95°$ **(Ans.)**



চিত্র : ১.২৮

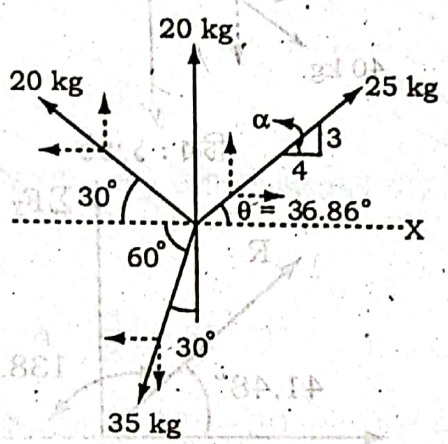
উদাহরণ - ৫। নিচের চিত্রের বলগুলো O বিন্দুতে একই সমতলে কাজ করছে। ঐ বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো : '১০R]*

সমাধান : $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.86°$

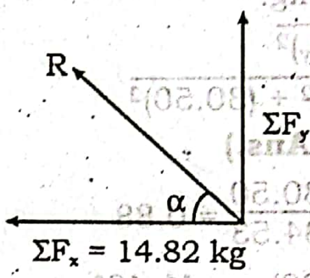
বলগুলো x ও y অক্ষ বরাবর উপাংশে বিশ্লেষণ করি।

$\overset{\rightarrow}{+} \Sigma F_x = 25 \cos 36.86° - 20 \cos 30° - 35 \cos 60° = -14.82$ kg.

$\overset{\uparrow}{+} \Sigma F_y = 25 \sin 36.86° + 20 + 20 \sin 30° - 35 \sin 60° = 14.68$ kg.



চিত্র : ১.২৯



চিত্র : ১.৩০

$\therefore R = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$

$= \sqrt{(-14.82)^2 + (14.68)^2}$

$= 20.86$ kg. **(Ans.)**

$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{14.68}{14.82}\right)$

$= -44.72°$ **(Ans.)**

উদাহরণ - ৬। নিচের চিত্রে প্রদত্ত বলগুলো বিশ্লেষণ করে লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো : '০২, '১২]*

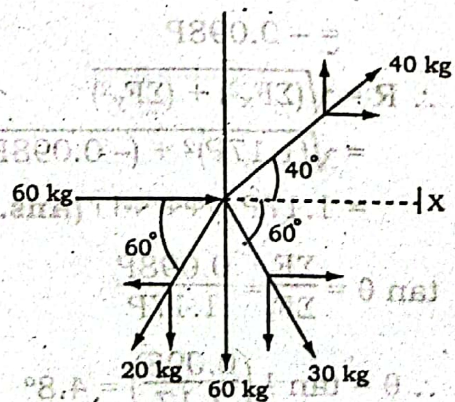
সমাধান : বলগুলো x ও y অক্ষ বরাবর বিশ্লেষণ করে পাই,

$\overset{\rightarrow}{+} \Sigma F_x = 40 \cos 40° + 60 - 20 \cos 60° + 30 \cos 60°$

$= 95.64$ kg.

$\uparrow + \Sigma F_y = 40 \sin 40° + 0 - 20 \sin 60° - 60 - 30 \sin 60°$

$= -77.58$ Kg.



চিত্র : ১.৩১

লব্ধির মান

$R = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$

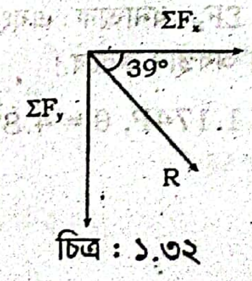
$= \sqrt{(95.64)^2 + (-77.58)^2}$

$= 123.15$ Kg. Ans.

লব্ধির দিক

$\tan \alpha = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = \frac{-77.58}{95.64}$

বা, $\alpha = \tan^{-1}(-0.81) = -39°$



চিত্র : ১.৩২

Scanned with CamScanner

উদাহরণ - ৭। নিচের চিত্র চিত্রানুযায়ী ক্রিয়ারত বলগুলোর লব্ধির মান ও প্রকৃত দিক নির্ণয় কর। [বাকাশিবো : '০৯R, '১০, '১১]

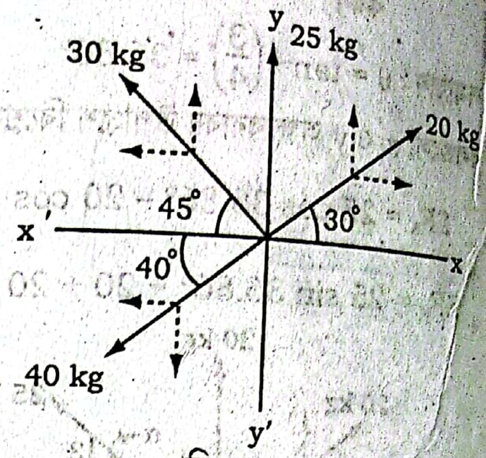
সমাধান : বলগুলো x ও y অক্ষ বরাবর উপাংশে বিশ্লেষণ করি।

$\overset{\rightarrow}{+} \Sigma F_x = 20 \cos 30° - 30 \cos 45° - 40 \cos 40°$

$= -34.53$ kg.

$\overset{\uparrow}{+} \Sigma F_y = 20 \sin 30° + 25 + 30 \sin 45° - 40 \sin 40°$

$= 30.50$ kg.



চিত্র : ১.৩৩

$R = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$

$= \sqrt{(-34.53)^2 + (30.50)^2}$

$= 46.07$ Kg **(Ans.)**

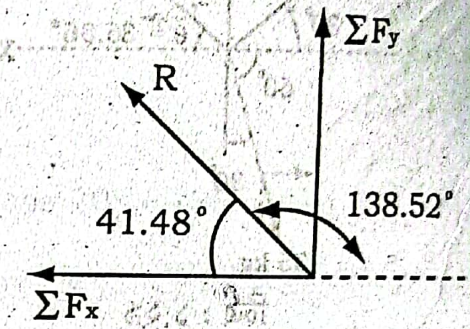
$\tan \alpha = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = \frac{30.50}{34.53} = 0.88$

$\alpha = \tan^{-1}(-0.88) = -41.48°$

যেহেতু ΣF_x ঋণাত্মক এবং ΣF_y ধনাত্মক। সেহেতু লব্দি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করবে।

প্রকৃত দিক $\theta = 180° - 41.48° = 138.52°$

$= 138.520°$ **(Ans.)**



চিত্র : ১.৩৪

উদাহরণ - ৮। নিম্নের চিত্রের বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান : বলগুলো x ও y উপাংশে বিশ্লেষণ করি।

$\overset{\rightarrow}{+} \Sigma F_x = 3P + P \cos 60° - 5P \cos 30° + 4P \cos 60°$

$= 1.17P$

$\overset{\uparrow}{+} \Sigma F_y = P \sin 60° + 5P \sin 30° - 4P \sin 60°$

$= -0.098P$

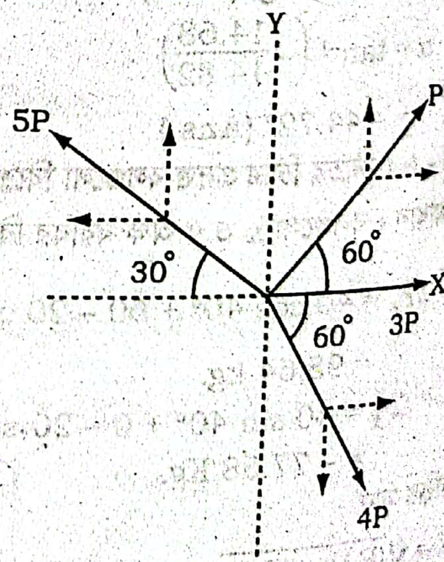
$\therefore R = \sqrt{(\Sigma F_x^2) + (\Sigma F_y^2)}$

$= \sqrt{(1.17P)^2 + (-0.098P)^2}$

$= 1.17P$ একক বল। **(Ans.)**

$\tan \theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = \frac{0.098P}{1.17P}$

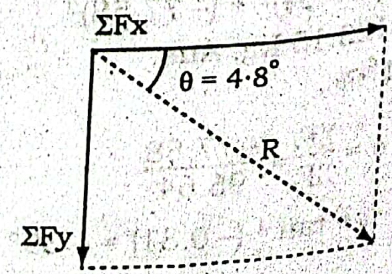
$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.098}{1.17}\right) = 4.8°$



চিত্র : ১.৩৫

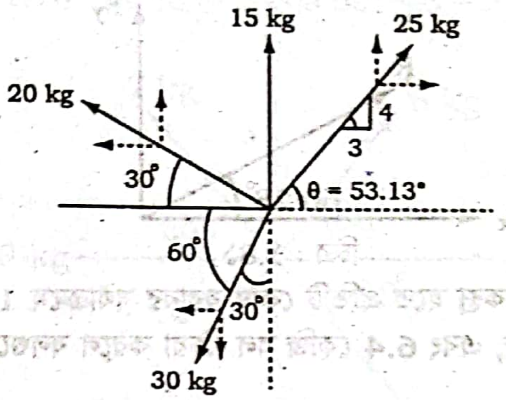
যেহেতু ΣF_x ধনাত্মক এবং ΣF_y ঋণাত্মক। সুতরাং লব্ধি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে।

$\therefore R = 1.174P, \theta = 4.8°$ **(Ans.)**



চিত্র : ১.৩৬

উদাহরণ - ৯। উনিচের চিত্র অনুযায়ী বলগুলো একই সমতলে একটি বিন্দুতে কাজ করছে। ঐ বলগুলোর লব্ধির মানও দিক নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো : '০৮]*



চিত্র : ১.৩৭

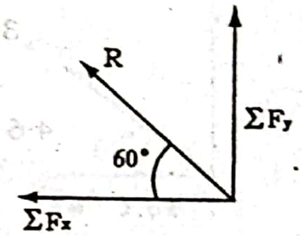
সমাধান : বলগুলো x ও y উপাংশে বিশ্লেষণ করি।

$\tan\theta = \frac{4}{3}$

$00 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13°$

$\overset{\rightarrow}{+}\ \Sigma F_x = 25\cos 53.13° - 20\cos 30° - 30\cos 60° = -17.32$ kg.

$\overset{\rightarrow}{+}\ \Sigma F_y = 25\sin 53.13° + 15 + 20\sin 30° - 30\sin 60° = 19.02$ kg.



চিত্র : ১.৩৮

$\therefore R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$

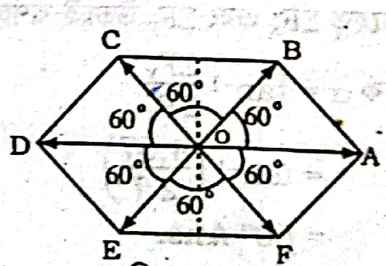
$= \sqrt{(-17.32)^2 + (19.02)^2} = 25.72$ kg

যেহেতু ΣF_x ধনাত্মক এবং ΣF_y ঋণাত্মক সেহেতু লব্ধি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করবে।

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{19.02}{17.32}\right) = 47.68°$ **(Ans.)**

উদাহরণ - ১০। **O** বিন্দুটি সুষম ষড়ভুজের কেন্দ্র. এর **OA, OB, OC, OD, OE** এবং **OF** রেখা বরাবর যথাক্রমে **2.75, 3.64, 4.55, 5.45, 0.91** এবং **1.82** *lb* বল দ্বারা কাজ করলে লব্ধির মান ও দিক বের কর।

সমাধান : সুষম ষড়ভুজের যেকোনো দুটির বাহুর মধ্যবর্তী কোণ $\theta = \frac{360}{6} = 60°$.



চিত্র : ১.৩৯

$\overset{\rightarrow}{+}\ \Sigma F_x = 2.75 + 3.64\cos 60° - 4.55\cos 60° - 5.45 - 0.91\cos 60° + 1.82\cos 60°$

$= -2.7$ *lb*.

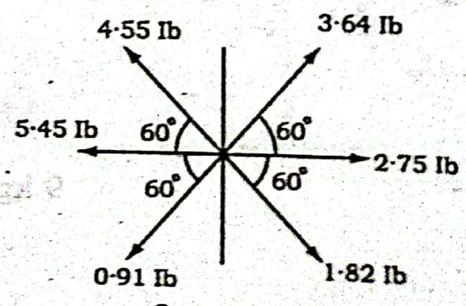
$\overset{\uparrow}{+}\ \Sigma F = 3.64\sin + 60°\ 4.55\sin 60° - 0.91\sin 60° - 1.82\sin 60°$

$= 4.73$ *lb*.

লব্ধি, $R = \sqrt{(\Sigma_x)^2 + (\Sigma_y)^2}$

$= \sqrt{(-2.7)^2 + (4.73)^2}$

$= 5.45$ *lb*.



চিত্র : ১.৪০

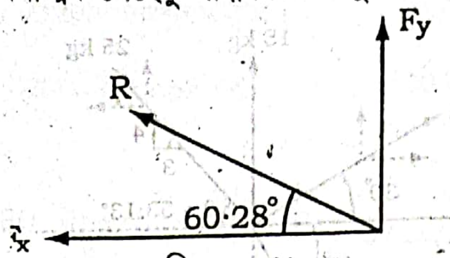
Scanned with CamScanner

যেহেতু ΣF_x ঋণাত্মক এবং ΣF_y ধনাত্মক সেহেতু লব্ধি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

দিক, $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$

$= \tan^{-1}\dfrac{4.73}{2.7}$

$= 60.28°$



চিত্র : ১.৪১

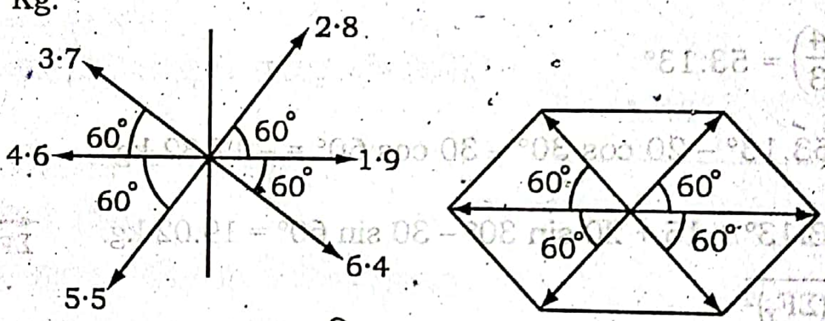
উদাহরণ - ১১। একটি সুষম ষড়ভুজের কেন্দ্র হতে প্রতিটি কোণ বরাবর যথাক্রমে 1.9 কেজি, 2.8 কেজি, 3.7 কেজি 4.6 কেজি, 5.5 কেজি, এবং 6.4 কেজি বল ক্রিয়া করলে বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

[বাকাশিবো : '১১]

সমাধান :

$\overset{\rightarrow}{+}\ \Sigma F_x = 1.9 + 2.8\cos 60° + 6.4\cos 60° - 3.7\cos 60° - 4.6 - 5.5\cos 60°$

$= -2.7$ Kg.



চিত্র : ১.৪২

$\overset{\uparrow}{+}\ \Sigma F_y = 2.8\sin 60° + 3.7\sin 60° - 5.5\sin 60° - 6.4\sin 60°$

$= -4.67$ Kg.

লব্ধি $R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$

$= \sqrt{(-2.7)^2 + (-4.67)^2}$

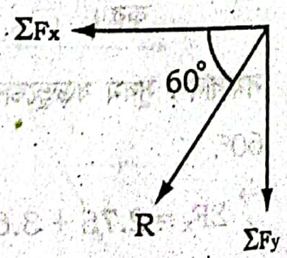
$= 5.4$ Kg.

যেহেতু ΣF_x এবং ΣF_y উভয়ই ঋণাত্মক। সেহেতু লব্ধি তৃতীয় চতুর্ভাগে ক্রিয়া করে।

দিক $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$

$= \tan^{-1}\left(\dfrac{4.67}{2.7}\right)$

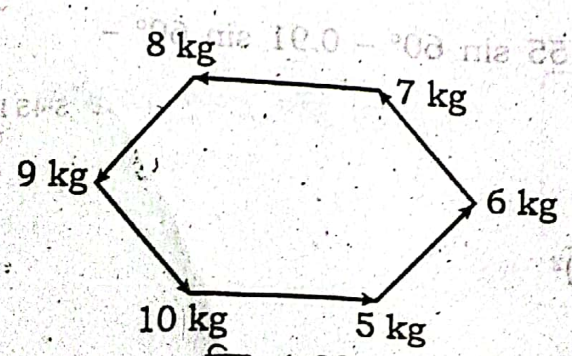
$= 60°$ **Ans.**



চিত্র : ১.৪৩

উদাহরণ - ১২। একটি সুষম ষড়ভুজের প্রতিবাহু বরাবর চিত্রানুযায়ী ক্রিয়ারত বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক বের কর।

[বাকাশিবো : '১১]

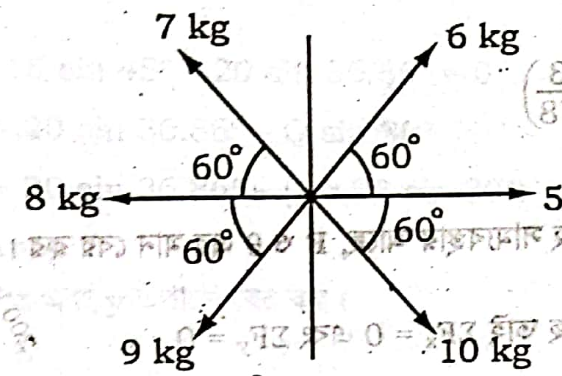


চিত্র : ১.৪৪

সমাধান :

$\overset{\rightarrow}{+} \Sigma F_x = 5 + 6\cos 60° + 10\cos 60° - 7\cos 60° - 8 - 9\cos 60°$

$= -3$ Kg.



চিত্র : ১.৪৫

$\overset{\uparrow}{+} \Sigma F_y = 7\sin 60° + 6\sin 60° + 5\sin 0° + 8\sin 0° - 9\sin 60° - 10\sin 60°$

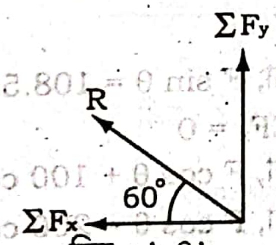
$= -5.19$Kg.

লব্ধি $R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-5.19)^2}$

$= \sqrt{35.94}$

$= 6$ Kg.



চিত্র : ১.৪৬

যেহেতু ΣF_x এবং ΣF_y উভয়ই ঋণাত্মক। সেহেতু লব্ধি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে ক্রিয়া করে।

দিক $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{5.19}{3}\right)$

$= 60°$ **Ans.**

N. B : (১) বলের হরিজন্টাল উপাংশকে কোন কোন লেখকগণ H বা F_H উল্লেখ করেছেন। অনুরূপভাবে বলের ভ্যাটিক্যাল উপাংশকে কোন কোন লেখকগণ V বা F_v উল্লেখ করেছেন।

(২) ছাত্রদের বুঝানোর সুবিধার্থে শুধুমাত্র হরিজন্টাল অক্ষের সাথে কোণ তৈরি করে সকল অঙ্কের সমাধান করা হয়েছে।

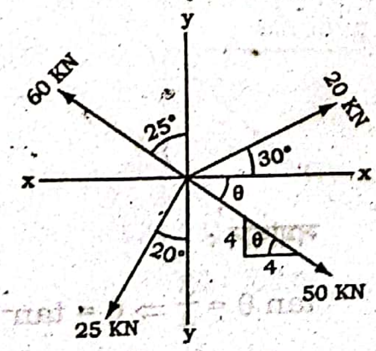
উদাহরণ - ১৩। নিচের চিত্রানুযায়ী বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো : '১২]*

সমাধান :

$\tan\theta = \frac{4}{4}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)$

$\therefore \theta = 45°$



চিত্র : ১.৪৭

বলগুলো x ও y উপাংশে বিশ্লেষণ করি

$+\overrightarrow{\Sigma F_x} = 20\cos 30° - 60\cos 65° - 25\cos 70° + 50\cos 45°$

$= 18.78$ KN

$\overset{\uparrow}{+} \Sigma F_y = 20\sin 30° + 60\sin 65° - 25\sin 70° - 50\sin 45°$

$= 5.53$ KN

Scanned with CamScanner

উদাহরণ - ১৮। চিত্রের বলগুলোর F_V ও F_H উপাংশ নির্ণয় কর। [বাকাশিবো : '০৯]

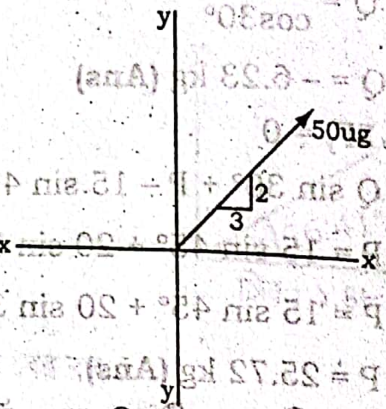
সমাধান : $\tan\theta = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(2/3)$

$\therefore \theta = 33.60°$

$\therefore F_V = 50\sin 33.69° = 27.74$ kg **(Ans)**

এবং $F_H = 50\cos 33.69° = 41.60$ kg **(Ans)**



চিত্র : ১.৫৪

উদাহরণ - ১৯। চিত্রানুযায়ী বলগুলো একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। [বাকাশিবো : '০৯]

সমাধান :

$\tan\theta = \frac{3}{5}$ বা $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ $\theta = 30.96°$

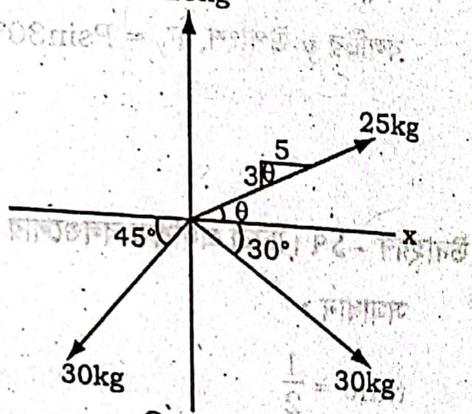
$\overset{\rightarrow}{+}\Sigma F_x = 25\cos 30.96° - 30\cos 45° + 30\cos 30°$

$= 26.21$ kg

$\overset{\uparrow}{+}\Sigma F_y = 25\sin 30.96° + 20 - 30\sin 45° - 30\sin 30°$

$\therefore$ লব্ধি $R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$

$= \sqrt{(26.21)^2 + (-3.35)^2} = 26.42$ kg **(Ans)**

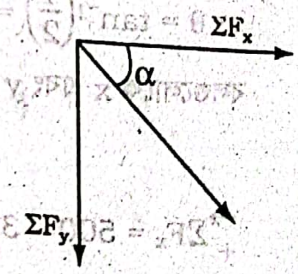


চিত্র : ১.৫৫

লব্ধির দিক, $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-\Sigma F_y}{\Sigma F_x}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{-3.35}{26.21}\right)$

$= -7.28°$ **(Ans)**



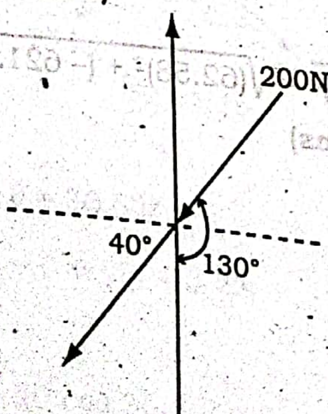
চিত্র : ১.৫৬

যেহেতু ΣF_x ধনাত্মক এবং ΣF_y ঋণাত্মক। সেহেতু লব্ধি চতুর্থ চতুর্ভাগে ক্রিয়া করবে।

উদাহরণ - ২০। চিত্রের বলটির x এবং y উপাংশ বের কর। [বাকাশিবো : '১০]

$F_x = -200\cos 40° = -153.21$ N **(Ans)**

$F_y = -200\sin 40° = -128.56$ N **(Ans)**



চিত্র : ১.৫৭

উদাহরণ - ২৬। **দুটি বল একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়া করে। দেখাও যে এদের লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে বল দুটির মানের যোগফল ও বিয়োগফলের সমান।**

সমাধান :

মনে করি, P ও Q দুটি বল একই বিন্দুতে θ কোণে ক্রিয়ারত।

$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$

Cose-1: লব্ধি (R) সর্বোচ্চ হবে যখন cosθ সর্বোচ্চ হবে।

আবার, $\theta = 0°$ হলেই cosθ সর্বোচ্চ এবং সেক্ষেত্রে $\cos\theta = \cos 0 = 1$ হবে।

অতএব, সর্বোচ্চ লব্ধি, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0°} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \times 1}$

$= \sqrt{(P + Q)^2}$

$\therefore R = P + Q$ (Proved)

Case 2 : R সর্বনিম্ন হবে যখন cosθ সর্বনিম্ন হবে।

কিন্তু $\theta = 180°$ হলে cosθ এর মান সর্বনিম্ন এবং সেক্ষেত্রে $\cos\theta = \cos 180° = -1$ হবে।

$\therefore$ সর্বনিম্ন লব্ধি, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180°} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ(-1)}$

$= \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ}$

$= (P \sim Q)^2$

$\therefore R = P \sim Q$

অর্থাৎ, $R = P - Q$ যখন $P > Q$ (Proved)

উদাহরণ - ২৭। **যদি P = Q হয় এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ হয়, তাহলে সামন্তরিকের সূত্রের সাহায্যে প্রমাণ কর যে,**

$$R = 2P\cos\frac{\theta}{2}$$ *[বাকাশিবো : '০৯R, '১১]*

অথবা, P ও Q দু'টি বল পরস্পর সমান হলে এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো : '০৮, '১০R]*

সমাধান :

সামন্তরিকের সূত্রানুসারে,

$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$

$= \sqrt{P^2 + P^2 + 2P.P.\cos\theta}$ [প্রশ্নমতে Q = P]

$= \sqrt{2P^2 + 2P^2\cos\theta}$

$= \sqrt{2P^2(1 + \cos\theta)}$

$= \sqrt{2P^2 \times 2\cos^2\theta/2}$

$= \sqrt{4P^2\cos^2\theta/2}$

$\therefore R = 2P\cos\theta/2$

N.B : অনুরূপভাবে, যদি P = Q হয় তবে আমরা লিখতে পারি–

$R = 2Q\cos\theta/2$

উদাহরণ - ২৮। **দুটি বল P ও Q এর লব্ধি R, Q কে দ্বিগুণ করলে উৎপন্ন লব্ধি বল P এর উপর লম্ব হয়। প্রমাণ কর Q = R।**

সমাধান :

মনে করি, P ও Q বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ.

সামন্তরিকের সূত্রানুসারে.

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$ ....(1)

আবার, $\tan\alpha = \dfrac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$

$\Rightarrow \tan 90° = \dfrac{2Q\sin\theta}{P + 2Q\cos\theta}$ [∵ লব্ধি বল P এর উপর লম্ব এবং Q = 2Q]

$\Rightarrow \dfrac{1}{0} = \dfrac{2Q\sin\theta}{P + 2Q\cos\theta}$ [$\because \tan 90° = \infty = \dfrac{1}{0}$]

Scanned with CamScanner

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

১। বলের বৈশিষ্ট্যগুলো লিখ। [বাকাশিবো : '০২, '০৫, '০৬, '০৭, '০৭R, '০৮, '১০R, '১৪, '১৪R, '১৫]
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.২ নং দ্রষ্টব্য।

২। বলের ত্রিভুজ সূত্রটি চিত্রসহ বর্ণনা কর। [বাকাশিবো : '১২, '১৪R]
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৪ ত্রিভুজ সূত্র দ্রষ্টব্য।

৩। বস্তুর উপর বলের প্রভাবগুলো বর্ণনা কর। [বাকাশিবো : '১৩R]
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.১ দ্রষ্টব্য।

৪। বল বিভাজন নীতি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [বাকাশিবো : '১১, '১২]
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৭ নং দ্রষ্টব্য।

৫। বলের প্রভাব ও বৈশিষ্ট্য লিখ। [বাকাশিবো : '০২, '০৫, '০৬, '০৭, '০৯, '১০, '১১]
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.১ ও ১.২ দ্রষ্টব্য।

৬। বল বিভাজন কী? বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো : '১০R]
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৬ নং দ্রষ্টব্য।

৭। সামন্তরিকের বলের লব্ধি নির্ণয়ের সূত্রটি লিখ। [বাকাশিবো : '১০]
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৫(গ) দ্রষ্টব্য।

৮। যদি $P = Q$ হয় এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে সামন্তরিক সূত্রের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $R = 2P\cos\frac{\theta}{2}$
উত্তর : উদাহরণ ২৭ নং দ্রষ্টব্য। [বাকাশিবো : '০০, '০৪, '০৬, '০৭, '০৭R, '১০]

৯। প্রমাণ কর যে, নির্দিষ্ট দিকে দুই বা ততোধিক বলের উপাংশগুলো বীজগাণিতিক যোগফল একই দিকে বলগুলো লব্ধির উপাংশের সামান। [বাকাশিবো : '০৭]
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৬ দ্রষ্টব্য।

১০। বলের বহুভুজ সূত্রটি চিত্রসহ বর্ণনা কর।
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৪ বহুভুজ সূত্র দ্রষ্টব্য।

১১। বলের সূত্রগুলো লিখ।
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৫ দ্রষ্টব্য।

১২। উপাংশ নির্ণয়ের সূত্র প্রতিপাদন কর।
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৮ দ্রষ্টব্য।

১৩। একাধিক বলের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় বর্ণনা কর।
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৮ দ্রষ্টব্য।

১৪। বিভাজন পদ্ধতিতে সমতলীয় বলসমূহের লব্ধি নির্ণয়ের ধাপগুলো লিখ।
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৩ দ্রষ্টব্য।

১৫। লব্ধি বলের দিক নির্ণয়ের ধাপগুলো লিখ।
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৩ দ্রষ্টব্য।

১৬। লেখচিত্র পদ্ধতিতে সমতলীয় বলসমূহের লব্ধি নির্ণয়ের পদ্ধতি বর্ণনা কর।
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৩ দ্রষ্টব্য।

১৭। লেখচিত্র পদ্ধতিতে অসমতলীয় বলসমূহের লব্ধি নির্ণয়ের পদ্ধতি বর্ণনা কর।
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৩ দ্রষ্টব্য।

Scanned with CamScanner

রচনামূলক প্রশ্নোত্তর

১। বলের সামন্তরিক সূত্রটি লিখ ও প্রমাণ কর। [বাকাশিবো : '০৮, '১০R, '১১,
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৪ দ্রষ্টব্য।

২। বলের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয়ের সামান্তরিকের সূত্রটি প্রতিপাদন কর। [বাকাশিবো : '১১, '১
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৪ দ্রষ্টব্য।

৩। চিত্রসহ বল বিভাজন নীতিটি প্রমাণ কর। [বাকাশিবো : '০৭, '৯R,
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৭ দ্রষ্টব্য।

৪। P ও Q দুটি বল পরস্পর θ কোণে কাজ করলে প্রমাণ কর যে, লব্ধি $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$ [বাকাশিবো : '০৭,
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৪ সামন্তরিকের সূত্র দ্রষ্টব্য।

৫। লেখচিত্র পদ্ধতিতে সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি ও দিক দেখাও।
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৩(খ) (i) দ্রষ্টব্য।

৬। লেখচিত্র পদ্ধতিতে অসমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি ও দিক দেখাও।
উত্তর : অনুচ্ছেদ ১.৩(খ) (ii) দ্রষ্টব্য।

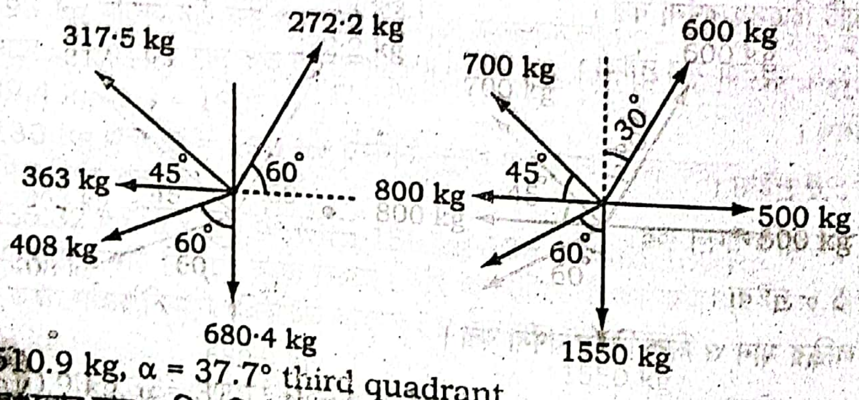
সমস্যাবলি

১। দুটি সমমানের বল পরস্পর 72° কোণে কাজ করলে এদের লব্ধির মান 100 kg হয়। বল দুটির মান কত?
উত্তর : P = Q = 161.8 kg. [বাকাশিবো : '১৪

২। 60 N এবং 20 N মানের দুটি বল এর লব্ধি 80 N. বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ এবং লব্ধির দিক নির্ণয় কর। [বাকাশিবো : '৯
উত্তর : θ = 0°, α = 0°।

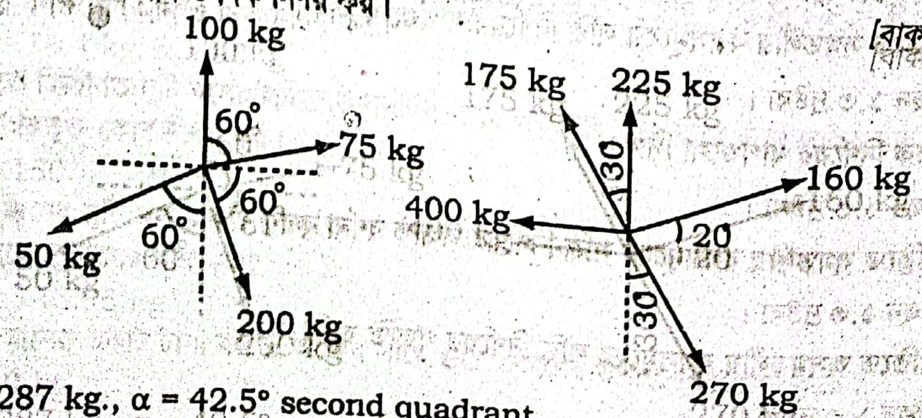
৩। দুইটি বল P এবং $P\sqrt{2}$ পরস্পর 135° কোণে কাজ করে। এদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। [বাকাশিবো : '৯৬, '১
উত্তর : R = P, α = 90° with $P\sqrt{2}$ Or, 45° with P।

৪। নিচের চিত্রের বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। [বাকাশিবো : '৯৫



উত্তর : R = 1610.9 kg, α = 37.7° third quadrant.

৫। নিচের চিত্রের বলগুলোর মান ও দিক নির্ণয় কর। [বাকাশিবো : '৮৮, '৯



উত্তর : R = 287 kg., α = 42.5° second quadrant.