দ্বিতীয় অধ্যায়

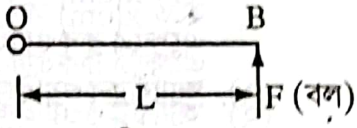
বলের মোমেন্ট

Understand the Aspects of Moment of Forces

২.১ বলের মোমেন্টের সংজ্ঞা
(Define Moment of Force)

কোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলের প্রভাবে ঐ বস্তু কোনো একটি বিন্দু বা অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরতে চায় বা ঘুরতে থাকে। এই ঘুরতে থাকার প্রবণতাকে ঐ বলের মোমেন্ট বলে।

বস্তুর উপর বলের ঘূর্ণন ক্রিয়াকে ঐ বলের চালক বা Moment of force বলে। অর্থাৎ যদি কোনো একটি নির্দিষ্ট স্থান হতে লম্ব দূরত্বে থেকে কোনো বস্তুকে ঘুরায় বা ঘুরাতে চায়, তখন বলের এরূপ ক্রিয়াকে বলের চালক বা মোমেন্ট বলে।



চিত্র : ২.১

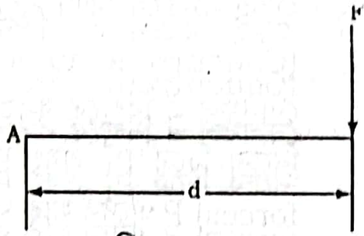
মনে করি, OB একখণ্ড লম্বা কাঠের একপ্রান্তে O বিন্দুতে একটি খুঁটির সঙ্গে এমন ভাবে আটকানো আছে যেন তা খুঁটির চারদিকে ঘুরতে পারে।

এখন খুঁটিটিই কাঠখণ্ডটির ঘূর্ণনের অক্ষ এবং O বিন্দুই ঘূর্ণনের কেন্দ্রবিন্দু। কাঠের খোলা দিক B এর উপর বল প্রয়োগ করলে তা O এর চারদিকে ঘুরতে থাকবে। এখন B হতে যতই O এর দিকে সরে বল প্রয়োগ করা হবে ততই দেখা যাবে যে তাকে ঘুরানোর জন্য বেশি বল প্রয়োগ করতে হয়েছে। দেখা যাচ্ছে, OB এর বিভিন্ন স্থানে একই পরিমাণ বল প্রয়োগ করলেও কম বা বেশি ঘূর্ণনের সৃষ্টি হচ্ছে। সুতরাং এই ঘূর্ণন শুধু বলের উপর নির্ভর করছে না, O বিন্দু হতে বল প্রয়োগ স্থানের দূরত্বের উপরেও নির্ভর করছে। অতএব সংক্ষেপে বলা যায় : কোনো বস্তু ঘূর্ণনের সময়ে তার উপর প্রযুক্ত বল ও বল প্রয়োগের স্থান হতে অক্ষের দূরত্বের গুণফলই বলের মোমেন্ট বা চালক।

বল = F এবং অক্ষ হতে বল প্রয়োগের দূরত্ব = 1 হলে বলের মোমেন্ট = F.1 = F

এ ঘূর্ণন ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে সেদিকে হলে তাকে সাধারণত পজেটিভ (+ve) এবং তা তার বিপরীত দিকে হলে নেগেটিভ (– ve) বলে ধরা হয়।

নিচের চিত্রে প্রযুক্ত বল F এবং পয়েন্ট A এবং বলের লাইন অব অ্যাকশন এর লম্ব দূরত্ব d (মোমেন্ট আর্ম)



চিত্র : ২.২

∴ A বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট, M_A = প্রযুক্ত বল × লম্ব দূরত্ব

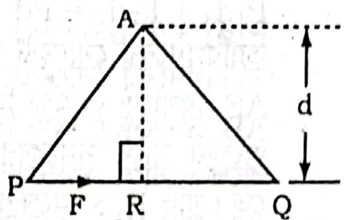
$= F \times d$

নিচের চিত্র অনুযায়ী PQ রেখাটি F বলের মান ও দিক নির্দেশ করে।

এখন A বিন্দু হতে F বলের লাইন অব অ্যাকশনের উপর AR লম্ব টানি। যা d দ্বারা নির্দেশ করে।

∴ A বিন্দু সাপেক্ষ F বলের মোমেন্ট

$M_A = F \times d = PQ \times AR = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times PQ \times AR\right)$



চিত্র : ২.৩

∴ $M_A = 2 \times APQ$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

সুতরাং, কোনো একটি বিন্দুর সাপেক্ষ একটি বলের মোমেন্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হবে।

২.১.১ মোমেন্টের একক
(Units os Moment) :

বল এবং দূরত্বের গুণফলই মোমেন্ট। তাই বল ও দূরত্বের এককের উপর মোমেন্টের মান নির্ভরশীল। যদি বলের একক কেজি এবং দূরত্বের একক মিটার হয়, তখন মোমেন্টের একক কেজি-মিটার। সংক্ষেপে kg-m লেখা হয়। আবার বলের একক নিউটন এবং দূরত্বের একক মিটার হলে মোমেন্টর একক নিউটন-মিটার (N-m)। সুতরাং মোমেন্টর একক নিম্নরূপ :

কেজি-মিটার (kg-m)
কেজি-সেন্টিমিটার (kg-cm)
নিউটন-মিলিমিটার (N-mm)
কিলোনিউটন-মিটার (KN-m) ইত্যাদি।

Scanned with CamScanner

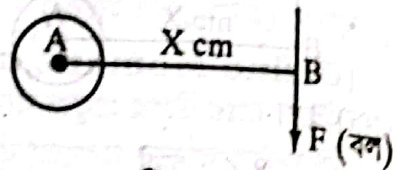
২.২ ক্লক ওয়াইজ এবং এ্যান্টি ক্লক ওয়াইজ মোমেন্ট (Identify the Clockwise and Anticlockwise Moment)

মোমেন্ট দুই প্রকার। যেমন :

(১) ক্লকওয়াইজ মোমেন্ট (Clockwise moment) ও

(২) অ্যান্টিক্লকওয়াইজ মোমেন্ট (Anticlockwise moment)

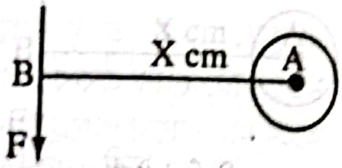
(১) **ক্লকওয়াইজ মোমেন্ট :** কোনো বল যদি নির্দিষ্ট লম্ব দূরত্বে থেকে বস্তুকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরায় বা ঘুরাতে চায়, তা হলে বলের এরূপ ঘূর্ণন ক্রিয়াকে ক্লকওয়াইজ মোমেন্ট বলে। পাশের চিত্রের F (kg) বল A বিন্দু হতে x(cm) লম্ব দূরত্বে থেকে বস্তুটিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরাবে।



চিত্র : ২.৪

এক্ষেত্রে ক্লকওয়াইজ মোমেন্ট, MA = F.x kg-cm (+ve)

(২) **অ্যান্টিক্লকওয়াইজ মোমেন্ট :** কোনো বল যদি নির্দিষ্ট লম্ব দূরত্বে থেকে বস্তুকে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ঘুরায় বা ঘুরাতে চায়, তাহলে বলের এরূপ ঘূর্ণন ক্রিয়াকে অ্যান্টিক্লকওয়াইজ মোমেন্ট বলে।



চিত্র : ২.৫

পার্শ্বের চিত্রে F (kg) বলটি A বিন্দু হতে x cm লম্ব দূরত্বে থেকে বস্তুটিকে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ঘুরাবে। অতএব A বিন্দুতে অ্যান্টিক্লক ওয়াইজ মোমেন্ট MA = F.X kg-cm (– ve)

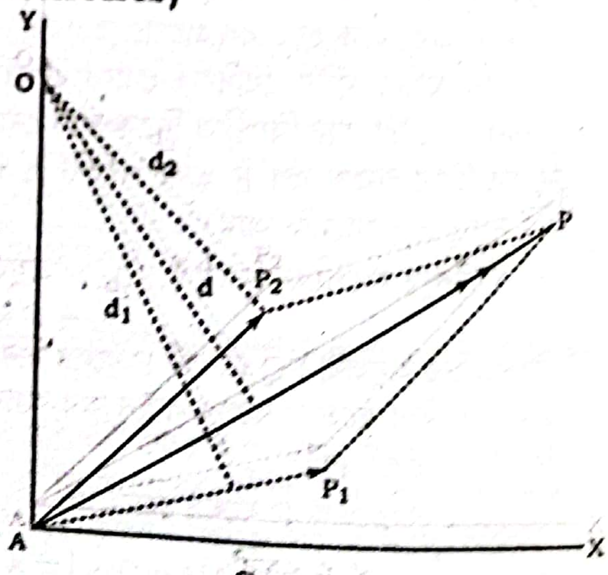
২.৩ ভ্যারিগননের মোমেন্টের নীতি বিবৃতিকরণ (Statement the Varignon's Principle of Moments)

একই সমতলে কোন বিন্দুর জন্য দুই বা ততোধিক সমকেন্দ্রিক (Coucurrent forces) বলের মোমেন্টের বীজগণিতীয় যোগফল ঐ বিন্দুতে বলগুলোর লব্ধির মোমেন্টের সমান হবে। নিচের চিত্রে P_1 এবং P_2 দুটি সমতলীয় বল (Coplaner forces) P এদের লব্ধি বল।

O বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট বিবেচনা করি।

ভ্যারিগননের নীতি অনুসারে

$P_1d_1 + P_2d_2 = Pd$



চিত্র : ২.৬

ভ্যারিগননের মোমেন্ট নীতির প্রমাণ : উপরের চিত্র (a) হতে AB রেখাকে y অক্ষ হিসাবে বিবেচনা করি এবং A বিন্দুতে y অক্ষের সাথে সমকোণ x অক্ষ অঙ্কন করি। নিচের চিত্র (c) তে। যদি R, x অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে তবে R এর উপর লম্ব বরাবর B বিন্দুতে একই θ কোণ উৎপন্ন করবে।

সুতরাং $R \times d = R \times AB \cos\theta = AB \times R \cos\theta$

$= AB \times F_x$.....(i) । F_x = x অক্ষ বরাবর R এর উপাংশ।

অনুরূপভাবে,

যদি P_1 ও P_2 বলের x অক্ষ বরাবর উপাংশ যথাক্রমে P_{1x} ও P_{2x} হয় তবে আমরা বলতে পারি,

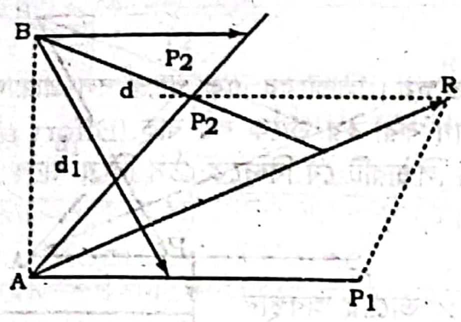
$P_1 \times d_1 = ABP_{1x}$..........(2)

এবং $P_2d_2 = ABP_{2x}$.........(3)

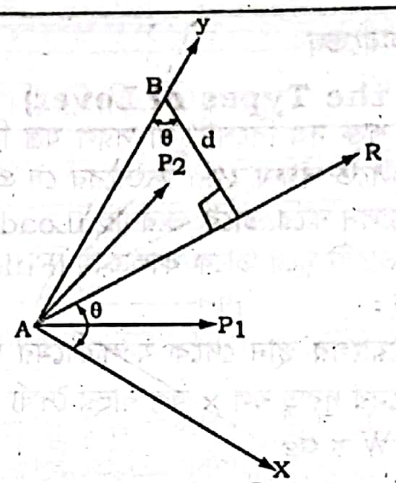
(2) + (3) ⇒ $P_1d_1 + P_2d_2 = AB(P_{1x} + P_{2x}) = AB \times F_x$......(4)

From (1) & (4)

$R \times d = P_1d_1 + P_2d_2$ (Proved)

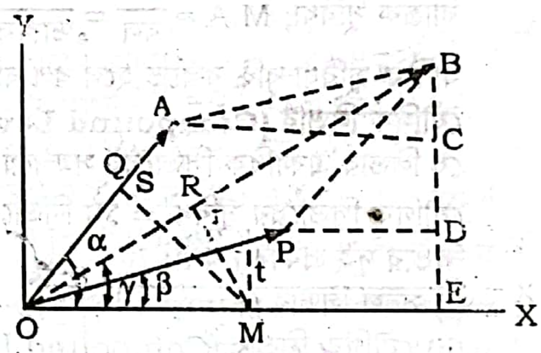


চিত্র : ২.৭



চিত্র : ২.৮

বিকল্প প্রমাণ :



চিত্র : ২.৯

প্রমাণ : চিত্রানুযায়ী মনে করি P এবং Q বলের জন্য সামন্তরিক সূত্রানুযায়ী প্রাপ্ত লব্ধি R এবং OX এর সাথে Q, R, P বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ যথাক্রমে α, β এবং γ; আরও মনে করি OX রেখার উপর অবস্থিত মোমেন্ট সেন্টার M হতে এদের দূরত্ব যথাক্রমে s, r, t। যদি s, r, t মোমেন্ট সেন্টার M হতে যথাক্রমে Q, R এবং P বল এর মোমেন্টবাহু (moment-arm) হয়, তবে ভ্যারিগ্ননের সূত্র অনুযায়ী M বিন্দুতে R এর মোমেন্ট উক্ত বিন্দুতে P এবং Q বলদ্বয়ের মোমেন্টের বীজগণিতীয় যোগফল-এর সমান হবে।

অর্থাৎ $R \times r = Q \times s + P \times t$

AB রেখাটি OP এর সমান এবং সমান্তরাল। সুতরাং BC = DE,

আবার,

$BE = CE + BC$

বা, $R \sin\gamma = Q \sin\alpha + P \sin\beta$

উভয়পক্ষে OM গুণ করে আমরা পাই,

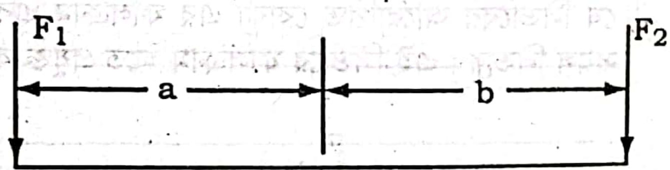
$R(OM.\sin\gamma) = Q(OM\sin\alpha) + P(OM\sin\beta)$

কিন্তু $OM.\sin\gamma = r$, $OM\sin\alpha = s$ এবং $OM.\sin\beta = t$

$\therefore R.r = Q.s + P.t$ প্রমাণিত।

২.৪ মোমেন্টের সূত্রের বিবৃতকরণ (State the Laws of Moment)

দুই বা ততোধিক সমতলীয় বল (Coplaner forces) একটি বিন্দুতে ক্রিয়ায় যদি বস্তু সাম্যবস্থায় থাকে তবে বস্তুর যেকোনো বিন্দু বা অক্ষ বরাবর সকল ক্লক ওয়াইজ মোমেন্ট সকল এ্যান্টিক্লক ওয়াইজ মোমেন্ট এর সমান হবে। অর্থাৎ বলগুলোর মোমেন্টের বীজগণিতীয় যোগফল শূন্য হবে।



চিত্র : ২.১০

মোমেন্টের সূত্রানুসারে,

$+\Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow -F_1 \times a + F_2 \times b = 0$

$\Rightarrow F_1 a = F_2 b$

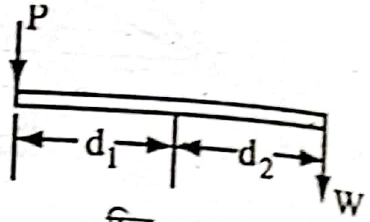
২.৫ লিভারের প্রকারভেদ
(Identify the Types of Lever)

লিভার একটি শক্ত দণ্ড বিশেষ, যা সরল যন্ত্র হিসেবে ব্যবহৃত হয়। লিভারের এক প্রান্তে বল প্রয়োগ করলে অন্য প্রান্তটি ভার তুলতে সক্ষম হয়। লিভারের যে প্রান্তে বল প্রয়োগ করা হয় তাকে বল বাহু (Effort arm) এবং যে প্রান্ত ভার উত্তোলন করে তাকে ভারবাহু (Load arm) বলে। লিভারটি যে বিন্দুতে ঠেস দিয়ে থাকে বা যে বিন্দুকে কেন্দ্র করে লিভারটি ঘুরে তাকে ফালক্রাম (Fulcrum) বলে।

লিভারের নীতি :

বল × বল প্রয়োগের স্থান থেকে ফালক্রামের দূরত্ব = ভার × ভারের অবস্থান থেকে ফালক্রামের দূরত্ব বল × বল বাহুর দৈর্ঘ্য = ভার × ভারবাহুর দৈর্ঘ্য

$\therefore P \times d_1 = W \times d_2$



চিত্র : ২.১১

যান্ত্রিক সুবিধা (Mechanical advantage, M.A) :

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা, M.A} = \frac{\text{ভার}}{\text{বল}} = \frac{\text{বল বাহুর দৈর্ঘ্য}}{\text{ভার বাহুর দৈর্ঘ্য}} = \frac{W}{P} = \frac{d_1}{d_2}$$

যান্ত্রিক সুবিধা বৃদ্ধি করতে হলে বল বাহুর দৈর্ঘ্য (d_1) বাড়াতে হবে এবং ভারবাহুর দৈর্ঘ্য (d_2) কমাতে হবে।

যৌগিক লিভার (Compound Lever) :

যে লিভার একাধিক লিভারের সমন্বয়ে গঠিত তাকে যৌগিক লিভার বলে।

যৌগিক লিভারের সুবিধা = ১ম লিভারের সুবিধা × ২য় লিভারের সুবিধা × ৩য় লিভারের সুবিধা।

লিভার দুই প্রকার। যথা:

(i) সরল লিভার (Simple lever)

(ii) যৌগিক লিভার (Compound Lever)

সরল লিভার : সোজা বা বাঁকা একটি মাত্র দণ্ড দ্বারা গঠিত লিভারকে সরল লিভার বলে।

যৌগিক লিভার : একাধিক সরল লিভারের সমন্বয়ে যে লিভার গঠিত হয় তাকে যৌগিক লিভার বলে।

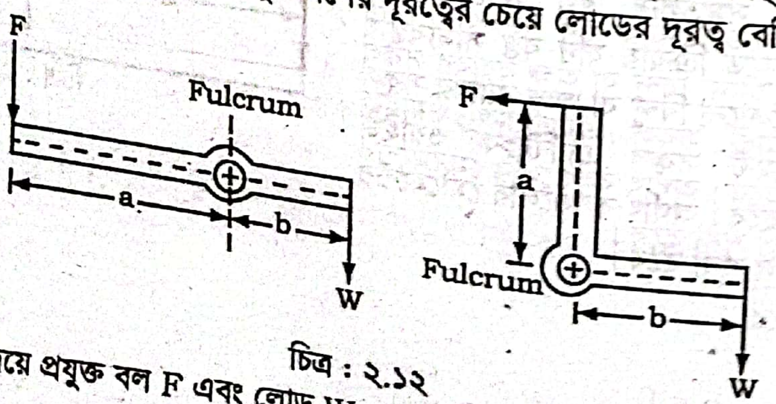
(i) সরল লিভার (Simple Lever) : সরল লিভারকে লোড প্রয়োগ পদ্ধতি মোতাবেক প্রথম ধাপ (First order), দ্বিতীয় ধাপ এবং তৃতীয় ধাপ লিভার, এই তিন শ্রেণিতে ভাগ করা যায়।

আমরা জানি, লিভারের এক প্রান্তে অপেক্ষাকৃত কম বল প্রয়োগ করে অপর প্রান্তে অপেক্ষাকৃত ভারি বোঝা উত্তোলন বা অপসারণ করা হয়।

কোনো সরল লিভারে আরোপিত বোঝা এবং প্রযুক্ত বল এর ফালক্রামের বিপরীতে দিকে অবস্থান করলে একে প্রথম ধাপের সরল লিভার বলে।

কোনো লিভারের আরোপিত বোঝা এর ফালক্রাম এবং প্রযুক্ত বলের মধ্যবর্তী যে কোনো স্থানে অবস্থান করলে তাকে দ্বিতীয় ধাপের সরল লিভার (Simple Lever) বলে। অর্থাৎ এই জাতীয় লিভারের বোঝা এবং প্রযুক্ত বল লিভারের ফালক্রামের একই পাশে অবস্থান করে। তবে ফালক্রাম হতে বোঝার তুলনায় প্রযুক্ত বলের দূরত্ব অনেক বেশি থাকে।

যে লিভারের আরোপিত বোঝা এর ফালক্রাম এবং প্রযুক্ত বলের মধ্যবর্তী স্থানে অবস্থান করে তাই তৃতীয় ধাপের সরল লিভার। এই লিভারে ফালক্রাম হতে প্রযুক্ত বলের দূরত্বের চেয়ে লোডের দূরত্ব বেশি থাকে।



চিত্র : ২.১২

চিত্রের সাধারণ লিভারদ্বয়ে প্রযুক্ত বল F এবং লোড W দেখানো আছে। প্রযুক্ত বলের বাহু a এবং

ফালক্রাম বিন্দুতে মোমেন্ট নিলে,

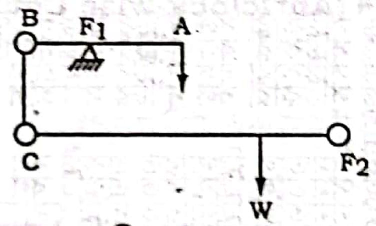
$Fa = Wb$

বা, $\frac{W}{F} = \frac{a}{b}$

এখানে $\frac{\text{লোড}}{\text{প্রযুক্ত বল}} = \frac{W}{F}$ কে লিভারের যান্ত্রিক সুবিধা (Mechanical Advantage) বলে এবং $\frac{\text{প্রযুক্ত বলের বাহু}}{\text{লোডের বাহু}} = \frac{a}{b}$ কে লিভারেজ বলে।

(ii) যৌগিক লিভার (Compund Lever) :

দুই বা ততোধিক সরল লিভার নিয়ে একটি যৌগিক লিভার গঠিত হয় (নিচের চিত্র দ্রষ্টব্য)। যৌগিক লিভারের যান্ত্রিক সুবিধা লিভারেজ সরল লিভার অপেক্ষা বেশি।



চিত্র : ২.১৩

২.৫.১ জোড় এবং এর ধর্ম (Couple and its Properties) :

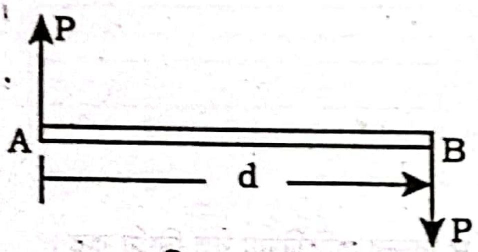
যখন একটি বস্তুর উপর দু'টি বিন্দুতে দু'টি সমান, সমান্তরাল ও বিপরীতমুখী বল ক্রিয়া করে, কিন্তু এদের ক্রিয়া একই সরলরেখা বরাবর কাজ করে না, তখন এরা একটি জোড় বা যুগল (Couple) সৃষ্টি করে। জোড় সৃষ্টিকারী বল দু'টির ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্বকে জোড়ের বাহু (Arm of Couple) বলে। জোড়ের যেকোন একটি বল ও জোড়ের বাহুর গুণফলকে ঐ জোড়ের মোমেন্ট (Moment of Couple) বলে। চিত্রে P মানের দু'টি সমান ও সমান্তরাল বল A ও B বিন্দুতে বিপরীতমুখী ক্রিয়া করে জোড় বা যুগলের সৃষ্টি করেছে।

জোড়ের মোমেন্ট = বল × জোড়ের বাহু

$M = P \times AB = P.d$

এখানে, P = বল

d = জোড়ের বাহু।



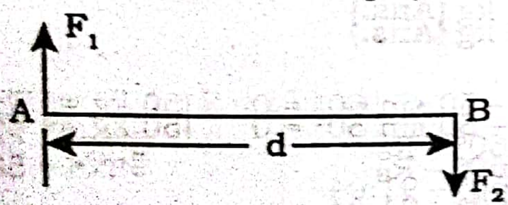
চিত্র : ২.১৪

জোড়ের শ্রেণিবিভাগ : জোড় দু'প্রকার, যথা :

(ক) **ধনাত্মক জোড় (Clock-wise Couple),**

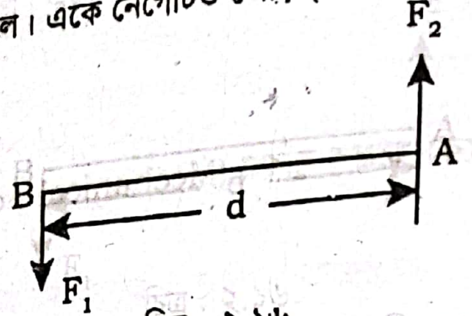
(খ) **ঋণাত্মক জোড় (Anticlock-wise Couple)।**

(ক) ধনাত্মক জোড় (Clock-wise Couple) : একটি জোড়ের ঘূর্ণন যদি ঘড়ির কাঁটার দিকে হয়, তবে তাকে ধনাত্মক জোড় বলে। একে পজেটিভ জোড়ও (Positive Couple) বলে।



চিত্র : ২.১৫

(খ) ঋণাত্মক জোড় (Anticlock-wise Couple) : একটি জোড়ের ঘূর্ণন যদি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত হয়, তবে তাকে ঋণাত্মক জোড় বলে। একে নেগেটিভ জোড় (Negative couple) বলে।



চিত্র : ২.১৬

জোড়ের ধর্ম (Anticlock-wise Couple) : জোড়ের ধর্মগুলো নিম্নরূপ :

১। জোড় সৃষ্টিকারী বল দু'টির বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য হবে।
২। জোড় সৃষ্টিকারী বল দু'টির সমতলে অবস্থিত যেকোন বিন্দুতে এদের মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফল সমান।
৩। একই সমতলে ক্রিয়ারত একটি বল এবং একটি জোড় ভারসাম্য সৃষ্টি করতে পারে না।
৪। একই সমতলে ক্রিয়ারত দু'টি জোড়ের মোমেন্ট সমান ও বিপরীত হলে এরা পরস্পর ভারসাম্য সৃষ্টি করে।
৫। একই সমতলে ক্রিয়ারত যেকোন সংখ্যক জোড়, একটি মাত্র জোড়ের সমান হতে পারে এবং উক্ত জোড়ের মোমেন্ট, অন্যান্য জোড়গুলোর মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফলের সমান।
৬। একটি জোড়ের পরিবর্তে সর্বদাই এর সমতুল্য অপর একটি জোড় সৃষ্টি করা যায়।

২.৬ বলের মোমেন্ট সংক্রান্ত সমস্যাবলির সমাধান (Solve Problem Related to Equilibrium of Forces)

উদাহরণ-১ : নিচের চিত্র অনুযায়ী P এবং W বল কাজ করে। W = 100 kg হলে P বলের মান নির্ণয় কর। [বাকশিবো : '০৬, '১১]

সমাধান : A বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

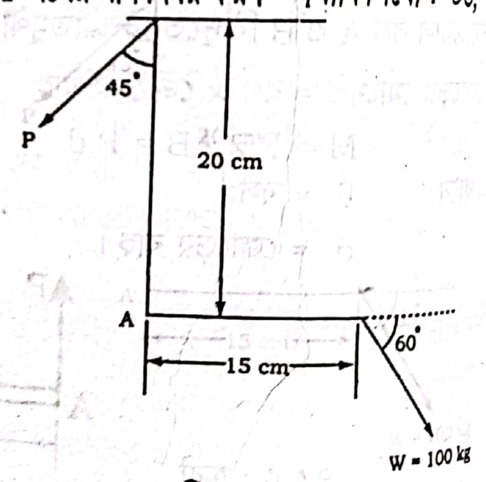
$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow -P \sin 45° \times 20 + W \sin 60° \times 15 = 0$

$\Rightarrow P \sin 45° \times 20 = 100 \sin 60° \times 15$

$\Rightarrow P = \dfrac{100 \sin 60° \times 15}{\sin 45° \times 20}$

$= 91.85$ kg **(Ans.)**



চিত্র : ২.১৭

উদাহরণ-২ : নিচের চিত্র অনুযায়ী A ও B বিন্দুর প্রতিক্রিয়া বল নির্ণয় কর। [বাকশিবো : '১১, '১২]

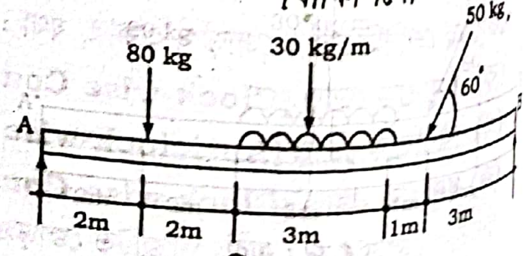
সমাধান : A বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow 80 \times 2 + 30 \times 3 \times (4 + 3/2) + 50 \sin 60° \times 8 - R_B \times 11 = 0$

$\Rightarrow R_B \times 11 = 1001.41$

$\Rightarrow R_B = \dfrac{1001.41}{11} = 91.04$ kg **(Ans.)**



চিত্র : ২.১৮

$\uparrow + \Sigma F_Y = 0$

$\Rightarrow R_A + R_B - 80 - 30 \times 3 - 50 \sin 60° = 0$

$\Rightarrow R_A = 80 + 90 + 50 \sin 60° - R_B$

$= 80 + 90 + 50 \sin 60° - 91.04$

$= 122.26$ kg **(Ans.)**

[50 kg এর জন্য ভার্টিক্যাল উপাংশ = 50 sin 60°]

উদাহরণ-৩ : 4m লম্বা একটি ক্যান্টিলিভার বিম 50kg লোড এর মুক্ত প্রান্তে বহন করছে। ক্যান্টিলিভের সাপোর্ট বিন্দুতে মোমেন্ট নির্ণয় কর। যখন (i) লোড ভার্টিক্যাল (ii) লোড 45° কোণে (inclined) কাজ করে।

সমাধান : (ii) ক্যান্টিলিভার সাপোর্ট A বিন্দুতে মোমেন্ট,

$\circlearrowleft + M_A = F \times d$

$= 50 \sin 45° \times 4$

$\therefore M_A = 141.42$ kg–m **(Ans.)**

এখানে,

$F = 50 \sin 45°$

$d = 4$ m

(i) ক্যান্টিলিভার সাপোর্ট A বিন্দুতে মোমেন্ট

$\circlearrowleft + M_A = F \times d$

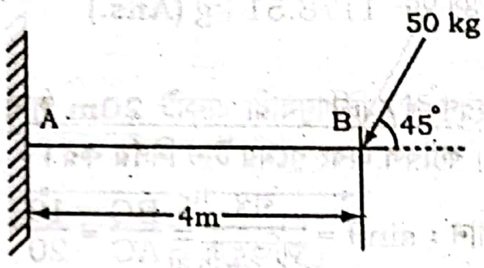
$= 50 \times 4$

$\therefore M_A = 200$ kg–m **(Ans.)**

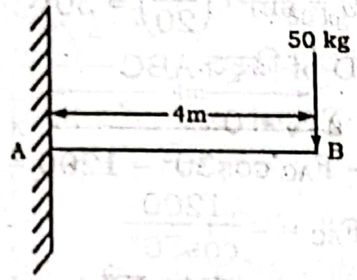
এখানে,

$F = 50$ kg

$d = 4$ m



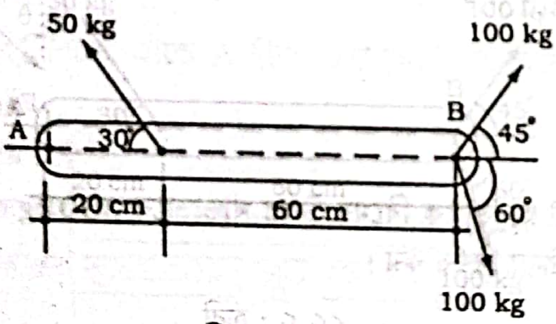
চিত্র : ২.১৯



চিত্র : ২.২০

উদাহরণ-৪ : নিচের চিত্রের লিভার প্রয়োগকৃত বলগুলোর A বিন্দুতে মোমেন্ট নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো : '১০R]*

সমাধান : A বিন্দুতে মোমেন্ট-



চিত্র : ২.২১

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = -50 \sin 30° \times 20 - 100 \sin 45° \times (60 + 20) + 100 \sin 60° \times (6y0 + 20)$

$= 771.34$ kg–m **(Ans.)**

উদাহরণ-৫ : নিচের চিত্র অনুযায়ী একটি বেল ক্র্যাংক লিভারে দুটি বল ক্রিয়া করছে। P বলের মান 150 kg হলে W ওজনের মান নির্ণয় কর।

[বাকাশিবো : '০৪, '০৫, '০৮, '১০]

সমাধান : A বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

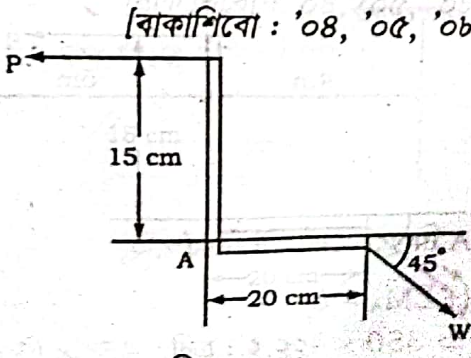
$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow -P \times 15 + W \sin 45° \times 20 = 0$

$\Rightarrow W \times \sin 45° \times 20 = 150 \times 15$ [$\because P = 150$ kg]

$\Rightarrow W = \dfrac{150 \times 15}{\sin 45° \times 20}$

$\therefore W = 159.70$ kg **(Ans.)**



চিত্র : ২.২২

Scanned with CamScanner

উদাহরণ-৬ : চিত্রে প্রদর্শিত **P** এবং **W** কাজ করছে। **P** বলের মান **500 kg** হলে **W** বলের মান কত? [বাকাশিবো : '১০]

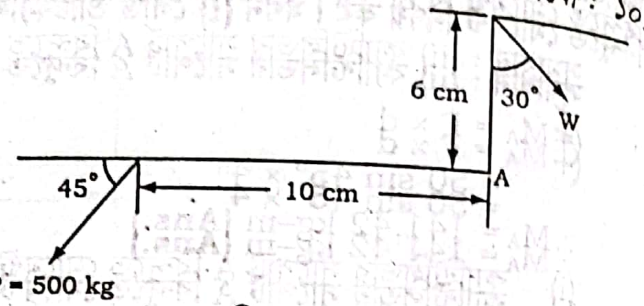
সমাধান : A বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow W\sin 30° \times 6 - 500\sin 45° \times 10 = 0$

$\Rightarrow W = \dfrac{500 \sin 45° \times 10}{\sin 30° \times 6}$

$= 1178.51$ kg **(Ans.)**



চিত্র : ২.২৩

উদাহরণ-৭ : চিত্রানুযায়ী একটি **20m** লম্বা বুম **1200 kg** লোড বহন করে। ক্যাবল **BC** হরিজন্টাল এবং **10 m** লম্বা। ক্যাবল এবং বুমের টান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\sin\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{10}{20}$

$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{10}{20}\right) = 30°$

FBD of ত্রিভুজ ABC

$\uparrow + \Sigma F_v = 0$

$\Rightarrow - F_{AC} \cos 30° - 1200 = 0$

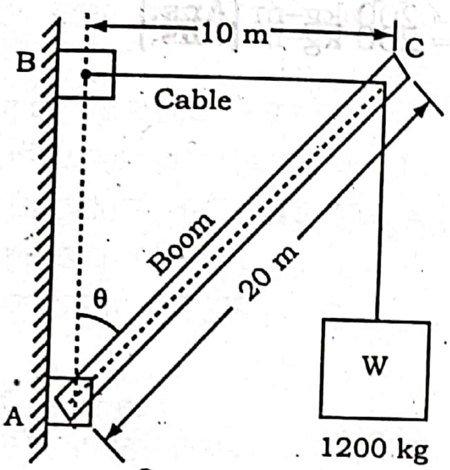
$\Rightarrow F_{AC} = -\dfrac{1200}{\cos 30°}$

$= -1385.64$ kg **(Ans.)**

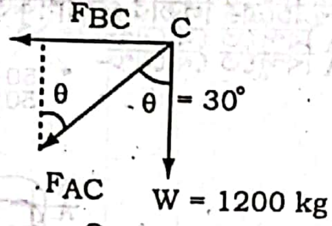
$\rightarrow + \Sigma F_H = 0 \Rightarrow - F_{BC} - F_{AC} \sin 30° = 0$

$\Rightarrow F_{BC} = -(-1385.64) \sin 30°$

$= 692.82$ kg



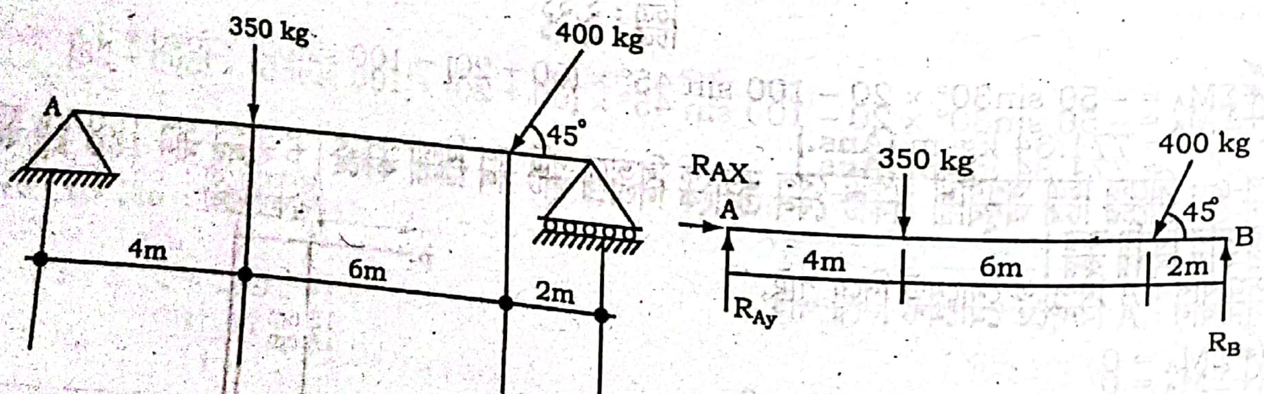
চিত্র : ২.২৪



চিত্র : ২.২৫

উদাহরণ-৮ : নিচের চিত্রানুযায়ী একটি অনুভূমিক বিমের উপর খাড়াভাবে **350kg** এবং **45°** কোণে **400kg** বল কাজ করছে। **A** ও **B** বিন্দুতে বলের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর। [বাকাশিবো : '০৭]

সমাধান :



চিত্র : ২.২৬

A বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow 350 \times 4 + 400 \sin 45° \times (4 + 6) - R_B \times 12 = 0$

$\Rightarrow R_B = 352.37$kg **(Ans.)**

$\overset{\rightarrow}{+}\Sigma F_H = 0 \Rightarrow R_{Ax} - 400\cos 45° = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 400\cos 45° = 282.8$ kg.

$\overset{\uparrow}{+}\Sigma F_v = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_B - 350 - 400\sin 45° = 0$

$\Rightarrow R_{Ay} = 350 + 400\sin 45° - R_B$

$= 350 + 400\sin 45° - 352.37 = 280.47$ kg.

আমরা জানি,

$RA = \sqrt{(R_{Ax})^2 + (R_{Ay})^2} = \sqrt{(282.8)^2 + (280.47)^2} = 398.30$ kg.

$\tan\theta = \frac{R_{Ay}}{R_{Ax}} = \frac{280.47}{282.8}$

$\theta = \tan^{-1}(0.99)$

$= 44.71°$

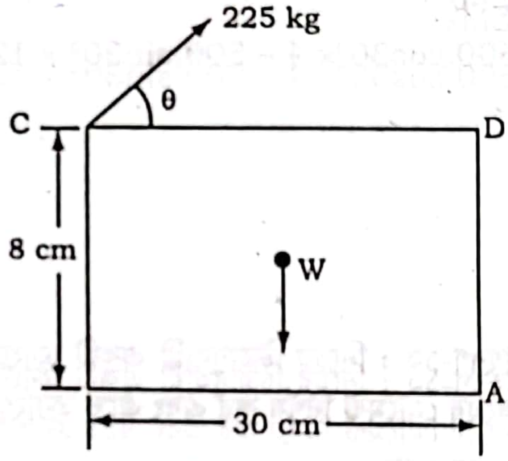
উদাহরণ-৯ : চিত্রে প্রদর্শিত সিস্টেম হতে A বিন্দুতে মোমেন্ট নির্ণয় কর।

যখন W = 300 kg এবং θ = 30°

সমাধান : $\circlearrowleft + \Sigma M_A$

$= -300 \times \frac{30}{2} + 225\cos 30° \times 8 + 225\sin 30° \times 30$

$\therefore M_A = 433.85$ kg-m **(Ans.)**



চিত্র : ২.২৭

উদাহরণ-১০ : 24 cm লম্বা লিভারের নিচের প্রান্তে A বিন্দু চিত্রানুযায়ী আটকানো এবং B বিন্দুতে ভার্টিক্যাল লোড প্রয়োগ করা হয়েছে।

(1) A বিন্দুতে মোমেন্ট নির্ণয় কর।

(2) B বিন্দুতে কী পরিমাণ হরিজন্টাল লোড প্রয়োগ করলে একই মোমেন্ট পাওয়া যাবে?

(3) A বিন্দুতে হতে B এর দিকে কত দূরে 240kg ভার্টিক্যাল বল প্রয়োগ করলে একই মোমেন্ট পাওয়া যাবে?

সমাধান :

(1) $\circlearrowleft + \Sigma M_A = 100 \times x$ [$x = 24\cos 60°$]

$= 100 \times 24\cos 60°$

$\therefore M_A = 1200$ kg–cm CW **(Ans.)**

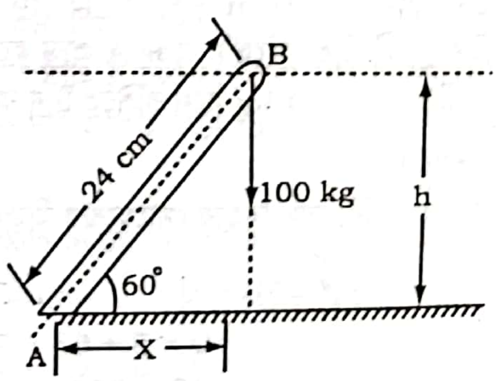
(2) মনে করি, B বিন্দুতে F বল প্রয়োগ করতে হবে।

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = F \times h$ [$\because h = 24\sin 60°$]

$\Rightarrow M_A = F \times 24\sin 60°$

$\Rightarrow 1200 = F \times 24\sin 60°$

$\Rightarrow F = \frac{1200}{24\sin 60°} = 57.74$ kg **Ans.**



চিত্র : ২.২৮

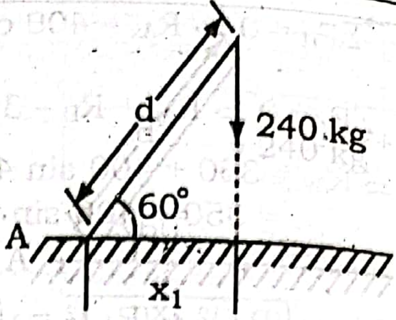
Scanned with CamScanner

(3) মনে করি, A বিন্দু হতে B এর দিকে d দূরত্ব 240 kg ভার্টিক্যাল বল প্রয়োগ করলে একই মোমেন্ট পাওয়া যাবে।

$\therefore \circlearrowleft + \Sigma M_A = 240 \times x_1$ $[\because x_1 = d \cos 60^\circ]$

$\Rightarrow 1200 = 240 \times d \cos 60^\circ$

$\Rightarrow d = \dfrac{1200}{240 \times \cos 60^\circ} = 10$ cm **(Ans.)**



চিত্র : ২.২৯

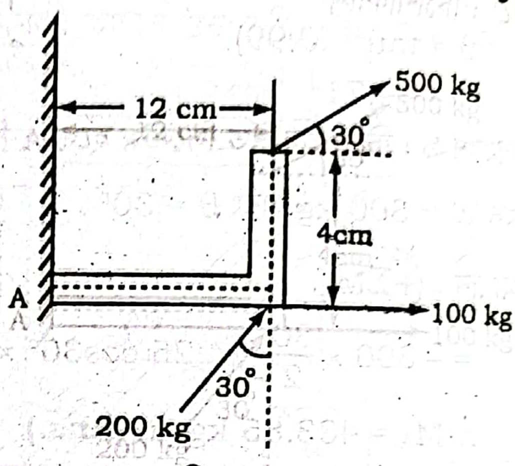
উদাহরণ-১১ : চিত্রে ক্রিয়ারত বলগুলোর জন্য A বিন্দুতে মোমেন্ট নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো : '১৩]*

সমাধান :

A বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$\circlearrowleft + \Sigma M_A$

$= 500 \cos 30^\circ \times 4 - 500 \sin 30^\circ \times 12 - 200 \cos 30^\circ \times 12$



চিত্র : ২.৩০

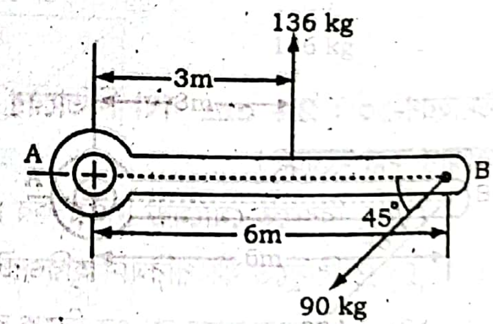
উদাহরণ-১২ : নিচের চিত্রানুযায়ী একটি ক্র্যাংকে এর উপর 136 kg এবং 90 kg বল কাজ করছে। A অক্ষ বরাবর বলদ্বয়ের মোমেন্ট নির্ণয় কর এবং এতে ক্র্যাংকটি কোন দিকে ঘুরবে?

সমাধান :

A বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$\circlearrowleft + \Sigma M_A$

$= -136 \times 3 + 90 \sin 45^\circ \times 6 = -26.2$ kg–cm CW ঘুরবে।



চিত্র : ২.৩১

উদাহরণ-১৩ : 10m লম্বা একটি দণ্ড AB এর একপ্রান্তে পিনের সাহায্যে এবং অপরপ্রান্তে একটি রশির সাহায্যে চিত্রানুযায়ী বাঁধা আছে। দণ্ডের A প্রান্ত হতে 4m এবং 7m দূরে যথাক্রমে 40 kg এবং 65 kg ওজন ঝুলানো আছে। দণ্ডটির ওজন 50 kg হলে রশিতে টান কত হবে?

সমাধান :

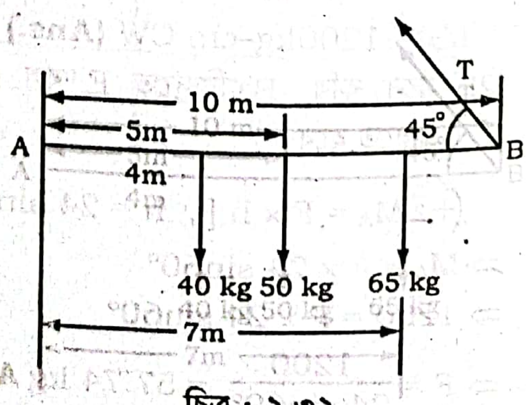
আমরা জানি, সাম্যাবস্থায় মোমেন্টের বীজগণিতীয় যোগফল = 0

অর্থাৎ $\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow 40 \times 4 + 50 \times 5 + 65 \times 7 - T \sin 45^\circ \times 10 = 0$

$\Rightarrow T \sin 45^\circ \times 10 = 865$

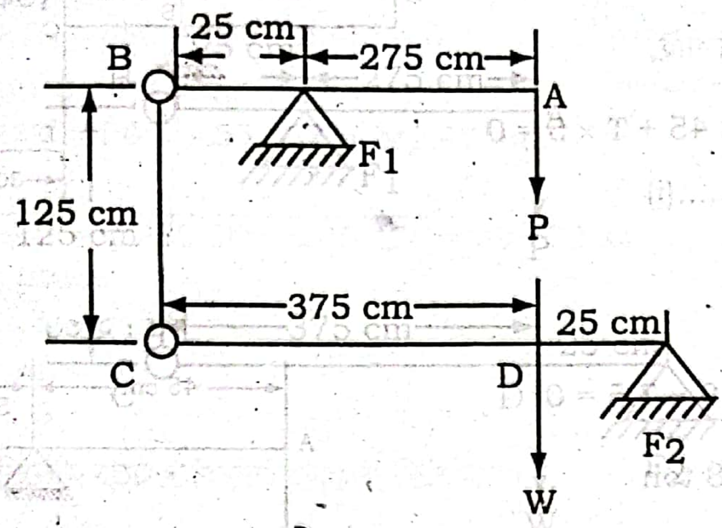
$\therefore T = 122.33$ kg **(Ans.)**



চিত্র : ২.৩২

Scanned with CamScanner

উদাহরণ-১৪ : নিচের চিত্রের যৌগিক লিভারের সাহায্যে ভারি লোড W উত্তোলন করা দরকার। A বিন্দুতে প্রযুক্ত বল P = 100 kg হলে W এর মান কত?



চিত্র : ২.৩৩

সমাধান :

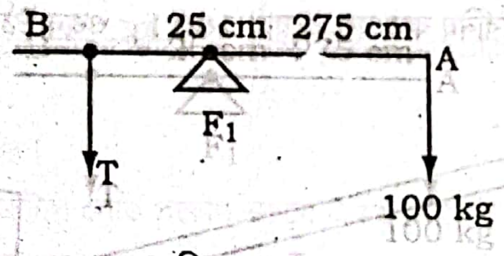
ফালক্রাম F_1 তে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$$(+\Sigma M_{F1} = 0$$

$$-T \times 25 + 100 \times 275 = 0$$

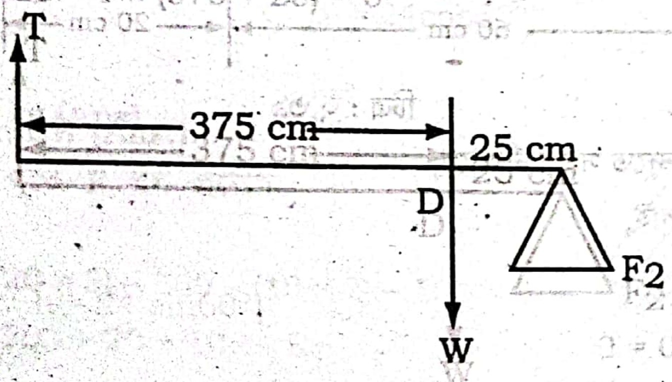
$$\Rightarrow T = \frac{100 \times 275}{25} = 1100\text{kg}$$

আবার, F_2 বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই,



চিত্র : ২.৩৪

$$(+\Sigma M_{F2} = 0 \Rightarrow -W \times 25 + T \times (375 + 25) = 0$$



চিত্র : ২.৩৫

$$\Rightarrow W = \frac{T \times 400}{25} = \frac{1100 \times 400}{25} = 17600\text{kg (Ans.)}$$