পঞ্চম অধ্যায়

মোমেন্ট অব ইনার্শিয়ার প্রয়োগক্ষেত্র

Understand the Application of Moment of Inertia

৫.০ ভূমিকা

(Introduction)

কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে বলের মোমেন্ট = বল × লম্ব দূরত্ব। যদি বল 'P' এবং কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হতে এর লম্ব দূরত্ব (Perpendicular distance) 'x' হয়, তাহলে বলের মোমেন্ট হবে P, x, এ মোমেন্টকে বলের প্রথম মোমেন্ট বলে। উক্ত মোমেন্টকে পুনরায় লম্ব দূরত্ব 'x' দ্বারা গুণ করলে পাওয়া যায় (P.x), x = Px^2, একে বলের মোমেন্টের মোমেন্ট বা বলের দ্বিতীয় মোমেন্ট বা জড়তার মোমেন্ট (Moment of Inertia) বলে। সংক্ষেপে একে M.I অথবা কেবলমাত্র I দ্বারা সূচিত করা হয়।

বলের পরিবর্তে যদি কোন ক্ষেত্রে কিংবা ভর বিবেচনা করা যায় তবে দ্বিতীয় মোমেন্ট যথাক্রমে ক্ষেত্রের দ্বিতীয় মোমেন্ট বা ভরের দ্বিতীয় মোমেন্ট বলে পরিচিত। সুতরাং সকল প্রকার দ্বিতীয় মোমেন্টকে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া বা জড়তার ভ্রামক বলে।

৫.১ মোমেন্ট অব ইনার্শিয়ার ব্যাখ্যা

(Explain the Term Moment of Inertia)

কোনো ক্ষেত্রের প্রতিটি ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল এবং নির্দিষ্ট অক্ষ হতে তাদের দূরত্বের বর্গের গুণফলের সমষ্টিকে ঐ ক্ষেত্রের জড়তার ভ্রামক বা মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া বলে।

(ক) ক্ষেত্রফলের ১ম মোমেন্ট : কোনো ক্ষেত্রের প্রতিটি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল এবং কোনো নির্দিষ্ট অক্ষ হতে উক্ত ক্ষুদ্র ক্ষেত্রগুলোর দূরত্বের বর্গের গুণফলের সমষ্টিকে নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে উক্ত ক্ষেত্রফলের ১ম মোমেন্ট বলে।

(খ) ক্ষেত্রফলের ২য় মোমেন্ট বা মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া : প্রতিটি ক্ষেত্র কতকগুলো ক্ষুদ্র ক্ষেত্রের সমষ্টি। কোনো নির্দিষ্ট অক্ষ হতে উক্ত ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ক্ষেত্রগুলোর দূরত্বের বর্গের গুণফলের সমষ্টিকে নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে উক্ত ক্ষেত্রের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া বা জড়তার ভ্রামক বলে। একে ক্ষেত্রফলের দ্বিতীয় মোমেন্টও (Second moment of area) বলে।

যদি $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ = A ক্ষেত্রের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের ক্ষেত্রফল,

$y_1, y_2, y_3 \cdots\cdot y_n$ = x-অক্ষ থেকে যথাক্রমে a_1, a_2, a_3 ইত্যাদি ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব এবং

$x_1, x_2, x_3 \cdots\cdot x_n$ = y-অক্ষ থেকে যথাক্রমে a_1, a_2, a_3 ইত্যাদি ক্ষেত্রে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব হয়,

তবে x-অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া

$$I_x = a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + a_3y_3^2 + \cdots\cdot a_ny_n^2 = \Sigma ay^2$$

এবং y-অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া

$$I_y = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + \cdots\cdots + a_ny_n^2 = \Sigma ax^2$$

যদি $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots\cdots = a_n = dA$ হয়, তবে আমরা লিখতে পারি .

$$I_x = \Sigma ay^2 = \Sigma y^2\,dA = \int y^2dA$$ এবং

$$I_y = \Sigma ax^2 = \Sigma x^2dA = \int x^2dA$$

Scanned with CamScanner

(গ) ভরের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া

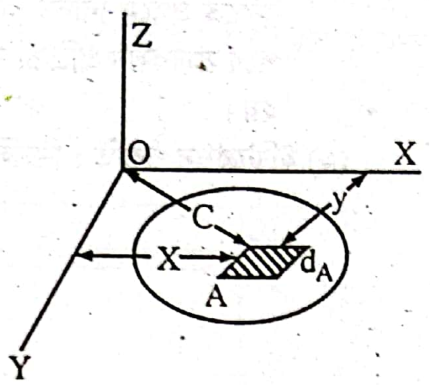
প্রতিটি দৃঢ় বস্তু কতকগুলো বস্তুকণার সমষ্টি। কোনো নির্দিষ্ট অক্ষ থেকে ঐ বস্তুকণাগুলোর প্রত্যেকটির দূরত্বের বর্গ এবং প্রত্যেকটির ভরের গুণফলের সমষ্টিকে ঐ অক্ষের সাপেক্ষে উক্ত বস্তুর মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া বলে। অর্থাৎ ভরের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া = $\Sigma(\text{দূরত্ব})^2 \times$ বস্তুকণার ভর।

এটির একক = $kg{\cdot}m^2$

মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া বা জড়তার ভ্রামক একটি ভৌত রশি। যা একটি নির্দিষ্ট অক্ষ হতে প্রতিটি ক্ষুদ্র ক্ষেত্রের দূরত্বের বর্গ এবং ক্ষুদ্র ক্ষেত্রগুলোর ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভরশীল। বিভিন্ন কাঠামোর ডিজাইন সমীকরণে এটির ব্যবহার সর্বাধিক।

(ঘ) গাণিতিকভাবে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়ার ব্যাখ্যা :

(চিত্র-৫.১) এ XY সমতলে A ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ক্ষেত্র রয়েছে। মনে করি, এর মধ্যে একটি ক্ষুদ্র ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল dA, যা y-y অক্ষ বরাবর y দূরত্বে রয়েছে এবং x-x অক্ষ বরাবর x দূরত্বে রয়েছে। অতএব, o-x অক্ষের সাপেক্ষে A ক্ষেত্রের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া,



চিত্র : ৫.১

$I_x = \int y^2\, dA$ .... (1)

অনুরূপভাবে, y অক্ষের সাপেক্ষে A ক্ষেত্রটির মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া,

$I_y = \int x^2\, dA$ .... (2)

অনুরূপভাবে, Z অক্ষের সাপেক্ষে A ক্ষেত্রটির মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া,

$I_z = \int r^2\, dA$ .... (3)

চিত্রানুযায়ী, $r^2 = x^2 + y^2$

অতএব,

$I_z = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2)\, dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$

বা, $I_z = I_x + I_y$ .... (4)

I_z কে পোলার মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া বা লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া বলে। এটি সাধারণত J দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

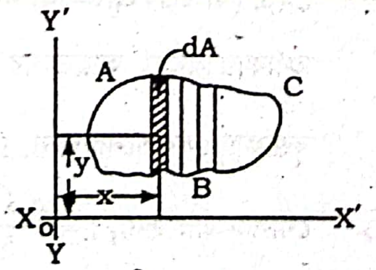
অর্থাৎ $I_z = J = \int r^2 dA = I_x + I_y$

২ কোন নির্দিষ্ট অক্ষ বরাবর কোন ক্ষেত্রের জড়তা ভ্রামক নির্ণয় পদ্ধতি

(Express the Derivation of the Formulae for Moment of Inertia of an Area)

নির্দিষ্ট অক্ষ বরাবর কোন ক্ষেত্রের জড়তা ভ্রামক নির্ণয়ের পদ্ধতি নিম্নরূপ :

চিত্রে ABC যে কোন একটি ক্ষেত্রের কোন একটি ক্ষুদ্র অংশ dA বিবেচনা করি। dA ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র রেফারেন্স অক্ষ X-X হতে y দূরত্বে এবং Y-Y হতে x দূরত্বে অবস্থিত।



চিত্র : ৫.২

এখন X-X লাইন বরাবর dA ক্ষেত্রের জড়তা-ভ্রামক

$I_{XX} = dA.y^2$ এবং সমস্ত ABC ক্ষেত্রের জন্য

$I_{XX} = \int dA.y^2$

একইভাবে Y-Y লাইন বরাবর DA ক্ষেত্রের জড়তা-ভ্রামক

$I_{YY} = dAx^2$ এবং সমস্ত ABC ক্ষেত্রের জন্য

$I_{YY} = \int y^2 dx^2$

Scanned with CamScanner

৫.৩ মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি

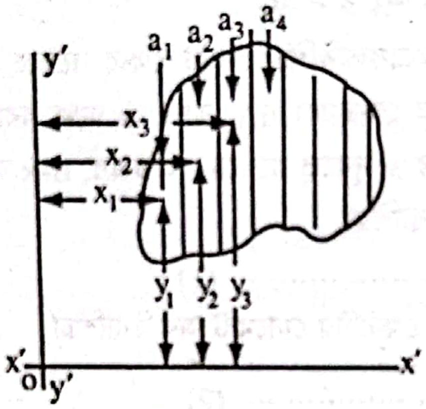
(Describe the Methods for Finding out the Moment of Inertia)

(১) সমাকলন পদ্ধতি (Integration Method)

(২) রুথ-এর পদ্ধতিতে (Routh's Rule)

(১) **সমাকলন পদ্ধতি (Integration Method) :** সমাকলন পদ্ধতিতে কোন ক্ষেত্রের জড়তা-ভ্রামক নির্ণয় করতে প্রথমে নির্দিষ্ট অক্ষ হতে নির্দিষ্ট দূরত্বে ঐ ক্ষেত্রের একটি ক্ষুদ্র অংশের জড়তা-ভ্রামক বের করা হয়। পরে সমাকলন প্রক্রিয়া সমস্ত অংশের জড়তা-ভ্রামক এর যোগফল তথা মোট ক্ষেত্রের জড়তা-ভ্রামক নির্ণয় করা হয়।

(২) **ইন্টিগ্রেশন পদ্ধতি :** নিম্নলিখিত পদ্ধতিতে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয়ে ইন্টিগ্রেশন সূত্র প্রমাণ করা যায়।



চিত্র : ৫.৩

মনে করি, $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots a_n$ = A ক্ষেত্রের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের ক্ষেত্রফল।

$y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots\cdots y_n$ = OX অক্ষ থেকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ক্ষেত্রগুলোর ভারকেন্দ্রের দূরত্ব

$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots x_n$ = OY অক্ষ থেকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র $(a_1, a_2 \cdots\cdots a_n)$ ক্ষেত্রগুলোর ভারকেন্দ্রের দূরত্ব

X–X' অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া,

$$I_x = a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + a_3y_3^2 + \cdots\cdots + a_ny_n^2$$

$$= \sum ay^2$$

যদি $dA = a_1 = a_2 = a_3 = \cdots\cdots = a_n$ হয় তবে

$$I_x = \sum y^2 dA = \int y^2 dA$$

$\therefore I_x = \int y^2 dA$ (x-অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া এর ইন্টিগ্রেশন সূত্র) অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে y-y অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া এর সূত্র $I_y = \int x^2 dA$

রুথ-এর সূত্র (Routh's Rule) : কোন ক্ষেত্র যদি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত তিনটি অক্ষের (X–X, Y–Y, Z–Z) সাথে প্রতিসাম্য থাকে, তবে রুথের সূত্র প্রয়োগে জড়তা-ভ্রামক নির্ণয় করা যায়। তিনটি অক্ষের সাথে প্রদত্ত ক্ষেত্র (বা ভর) প্রতিসাম্য না হলে এই নিয়মে জড়তা-ভ্রামক নির্ণয় করা যাবে না সূত্রগুলো নিম্নরূপ :

বর্গাকার অথবা আয়তকার ক্ষেত্রের জন্য, $I = \dfrac{A \text{ (or M)} \times S}{3}$

বৃত্তাকার সেকশনের জন্য, $I = \dfrac{A \times S}{5}$ Or, $\dfrac{A \times M}{5}$

গোলক-এর জন্য, $I = \dfrac{A \times S}{5}$ Or, $\dfrac{A \times M}{5}$

এখানে I = ভারকেন্দ্র (c.g) দিয়ে অতিক্রান্ত অক্ষ বরাবর জড়তা-ভ্রামক

A = ক্ষেত্রফল

M = ভর

S = যে অক্ষ বরাবর জড়তা-ভ্রামক নির্ণয় করতে হবে, এটি ছাড়া অপর দুটি অক্ষের অর্ধাংশের বর্গের যোগফল তা।

Scanned with CamScanner

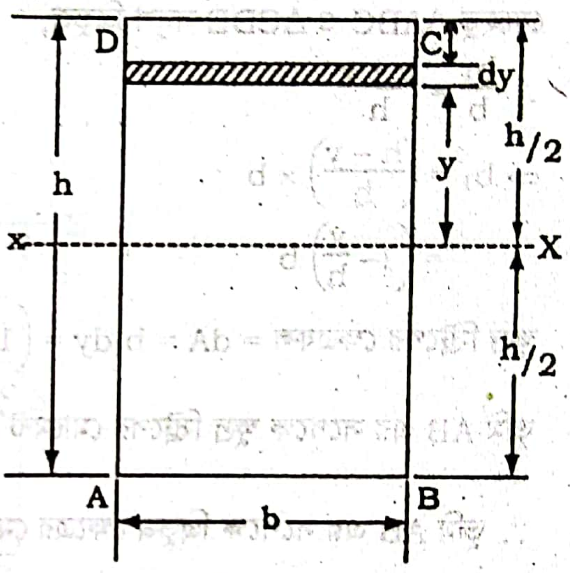
৫.৪ ইনটিগ্রেশন পদ্ধতিতে সরল ক্ষেত্রফলের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয়

(Find the Moment of Inertia of Simple Areas by the Method of Integration)

(a) (i) ভারকেন্দ্রগামী বা সেন্ট্রয়ডাল অক্ষের সাপেক্ষে/বরাবর একটি আয়তক্ষেত্রের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া (Determine the Moment of inertia of Rectangular about its Centroidal Axis) :

মনে করি, ABCD একটি আয়তক্ষেত্রের বেস b এবং উচ্চতা h সেন্ট্রয়ডাল অক্ষ x–x এর সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় করতে হবে।

সেন্ট্রয়ডাল অক্ষ x–x হতে y দূরত্বে dy পুরুত্বের এটি ক্ষুদ্র স্ট্রিপ বিবেচনা করি।



চিত্র : ৫.৪

∴ ক্ষুদ্র স্ট্রিপের ক্ষেত্রফল = $dA = bdy$

∴ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেফল = $A = bh$

ক্ষুদ্র স্ট্রিপের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া = $y^2 dA$

$= y^2 \times bdy$

সম্পূর্ণ আয়তক্ষেত্রটির মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া

$$I_{xx} = \int_{h/2}^{-h/2} y^2 bdy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$= \frac{b}{3}[(h/2)^3 - (-h/2)^3]$$

$$= \frac{b}{3}\left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right] = \frac{b}{3} \times \frac{2h^2}{8} = \frac{bh^3}{12}$$

$$\therefore I_{xx} = \frac{bh^3}{12}$$

অনুরূপভাবে, $I_{YY} = \dfrac{hb^3}{12}$

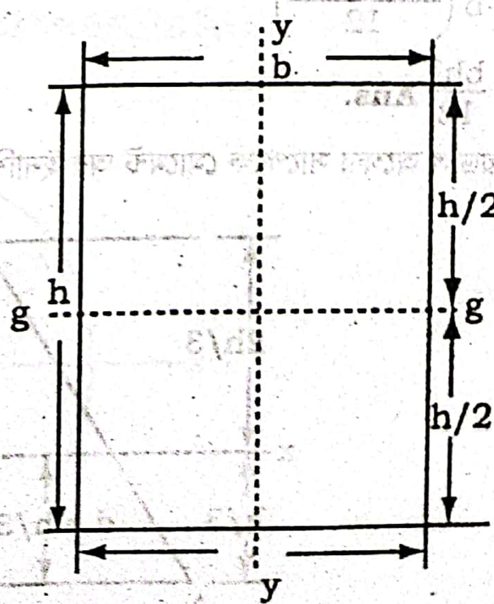
(a) (ii) ভূমির সাপেক্ষে আয়তক্ষেত্রের মোমেন্টে অব ইনার্শিয়া (From parallel axis theorem)

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} + Ad^2$$

$$\Rightarrow I_{xx} = \frac{bh^3}{12} + b \times h \times \left(\frac{h}{2}\right)^2 d = \left[\frac{h}{2}\right]$$

$$\Rightarrow I_{xx} = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3 + 3bh^3}{12} = \frac{4bh^3}{12}$$

$$\therefore I_{xx} = \frac{bh^3}{3}$$



চিত্র : ৫.৫

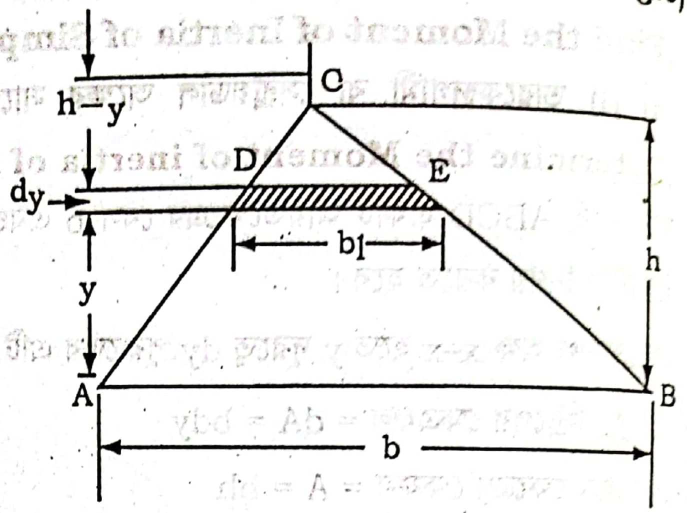
Scanned with CamScanner

(b) ত্রিভুজের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় (Determine the moment of Inertia of a traingle)

(i) ভূমির সাপেক্ষে (About its base)

(ii) ভারকেন্দ্রগামী বা সেন্ট্রয়ডাল অক্ষের সাপেক্ষে

(iii) ভূমির সমান্তরাল শীর্ষ বিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে



চিত্র : ৫.৬

(i) মনে করি, ABC ত্রিভুজের ভূমি b এবং উচ্চতা h ভূমির AB হতে দূরত্বে y দৈর্ঘ্যের এবং dy পুরুত্বের একটি ক্ষুদ্র স্ট্রিপ বিবেচনা করি।

যেহেতু ΔABC ও ΔCDE সদৃশ ত্রিভুজ,

$$\therefore \frac{b_1}{b} = \frac{h-y}{h}$$

$$\Rightarrow b_1 = \left(\frac{h-y}{h}\right) \times b$$

$$= \left(1 - \frac{y}{h}\right) b$$

ক্ষুদ্র স্ট্রিপের ক্ষেত্রফল $= dA = b_1 dy = \left(1 - \frac{y}{h}\right) bdyy$

ভূমি AB এর সপেক্ষে ক্ষুদ্র স্ট্রিপের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া $= y^2 dA = y^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) bdy$

$\therefore$ ভূমি AB এর সপেক্ষে ত্রিভুজ ক্ষেত্রের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া $I_{AB} = \int_0^h y^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) bdy$

$$\Rightarrow I_{AB} = \int_0^h \left(y^2 - \frac{y^3}{h}\right) bdy$$

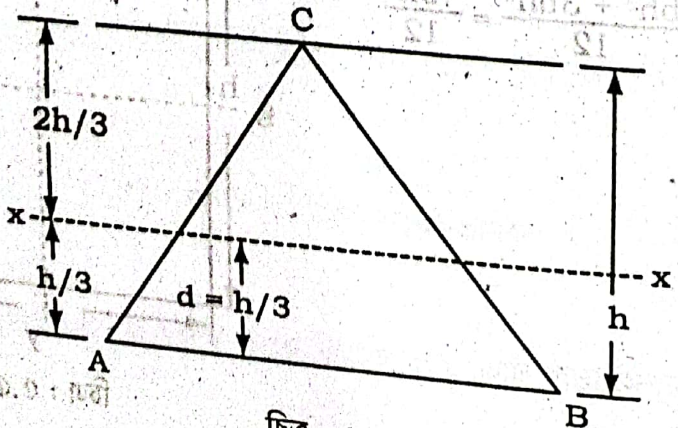
$$= \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4h}\right]_0^h$$

$$= b\left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4h}\right)$$

$$= b\left(\frac{4h^3 - 3h^3}{12}\right)$$

$$\therefore I_{AB} = \frac{bh^3}{12} \textbf{ Ans.}$$

(ii) সেন্ট্রয়ডাল অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া



চিত্র : ৫.৭

From Parllel Axis theorem

$I_{AB} = I_{xx} + Ad^2$

$\Rightarrow \frac{bh^3}{12} = I_{xx} + \frac{1}{2} \times b \times h \times \left(\frac{h}{3}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{bh^3}{12} = I_{xx} + \frac{bh^3}{18}$

$\Rightarrow I_{xx} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18}$

$\Rightarrow I_{xx} = \frac{3bh^3 - 2bh^3}{36}$

$\therefore I_{xx} = \frac{bh^3}{36}$ **Ans.**

এখানে, ভূমির সাপেক্ষে

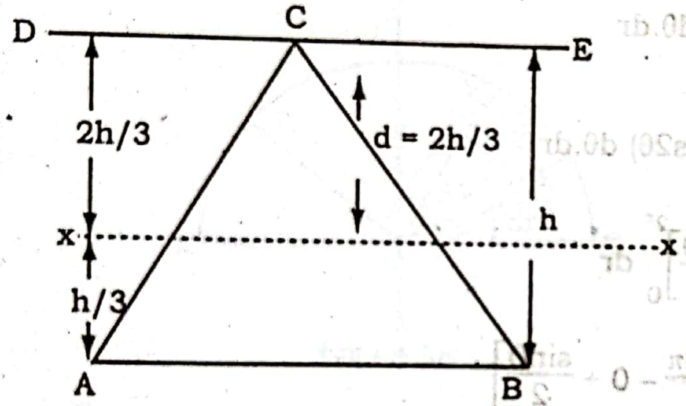
$MI = I_{AB} = \frac{bh^3}{12}$

I_{xx} = সেন্ট্রয়ডাল অক্ষের সাপেক্ষে MI

A = ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times b \times h$

d = ভূমি ও সেন্ট্রয়ডাল অক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \bar{y} = h/3$

(iii) From Parallel Axis Theorem



চিত্র : ৫.৮

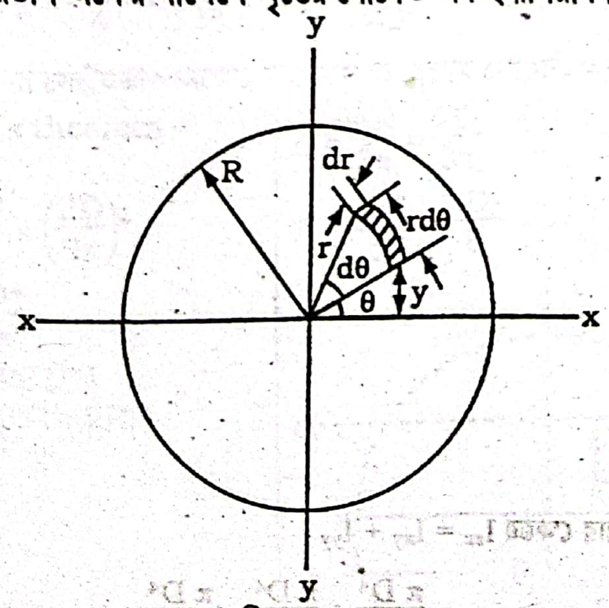
$I_{DE} = I_{xx} + Ad^2$

$= \frac{bh^3}{36} + b \times h \times \left(\frac{2h}{3}\right)^2$

$= \frac{bh^3}{36} + \frac{2bh^3}{9}$

$= \frac{bh^3 + 8bh^3}{36} = \frac{bh^3}{4}$ **(Ans)**

(c) ভরকেন্দ্রগামী বা সেন্ট্রয়ডাল অক্ষের সাপেক্ষে বৃত্তের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় :



চিত্র : ৫.৯

মনে করি, বৃত্তটির ক্ষুদ্র স্টিপের দৈর্ঘ্য $rd\theta$. এবং প্রস্থ dr (চিত্র : ১০.৮) ক্ষুদ্র স্ট্রিপের ক্ষেত্রফল $= dA = rd$

∴ সেন্ট্রয়ডাল অক্ষ $x - x$ সাপেক্ষে বৃত্তটির মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া

$$I_{xx} = \int_0^R\int_0^{2\pi} y^2 dA$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow I_{xx} = \int_0^R\int_0^{2\pi} (r\sin\theta)^2 r d\theta.dr$$

$$= \int_0^R\int_0^{2\pi} r^3.\sin^2\theta d\theta dr$$

$$= \int_0^R\int_0^{2\pi} r^3.\frac{1}{2}.2\sin^2\theta d\theta.dr$$

$$= \int_0^R\int_0^{2\pi} r^3.\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta.dr$$

$$= \int_0^R r^3.\frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} dr$$

$$= \int_0^R \frac{1}{2} r^3\left[2\pi - \frac{\sin 4\pi}{2} - 0 + \frac{\sin 0}{2}\right]$$

$$= \int_0^R r^3.\frac{1}{2}[2\pi - 0 - 0 + 0]\, dr$$

$$= \int_0^R r^3.\frac{1}{2}\times 2\pi.dr$$

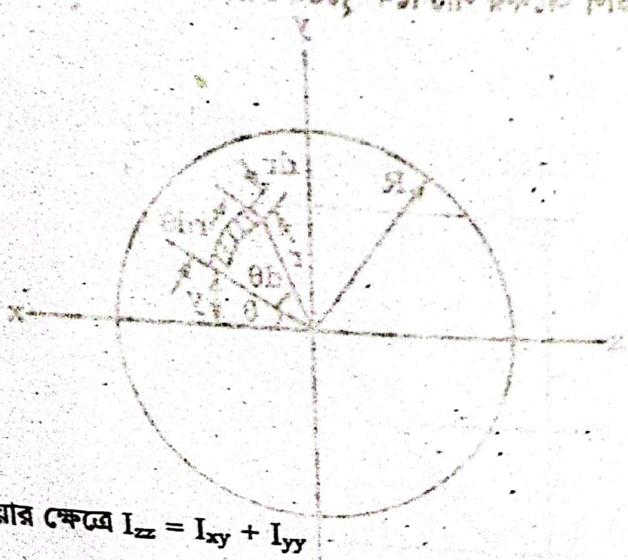
$$= \frac{1}{2}\times 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \pi\times\frac{1}{4}[R^4 - 0]$$

$$= \frac{\pi R^4}{4}$$

$$= \frac{\pi D^4}{4\times 16}\left[\because R = \frac{D}{2}\right]$$

$$\therefore I_{xx} = \frac{\pi D^4}{64}$$



অনুরূপভাবে, $I_{yy} = \frac{\pi D^4}{64}$

পোলার মোমেন্ট অব ইনার্শিয়ার ক্ষেত্রে $I_{zz} = I_{xy} + I_{yy}$

$$= \frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi D^4}{32}$$

(d) (i) ব্যাস অক্ষের (Demetral Axis) সাপেক্ষে অর্ধবৃত্তের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় :
মনে করি, অর্ধবৃত্তটির ক্ষুদ্র স্ট্রিপের দৈর্ঘ্য $rd\theta$ এবং প্রস্থ dr

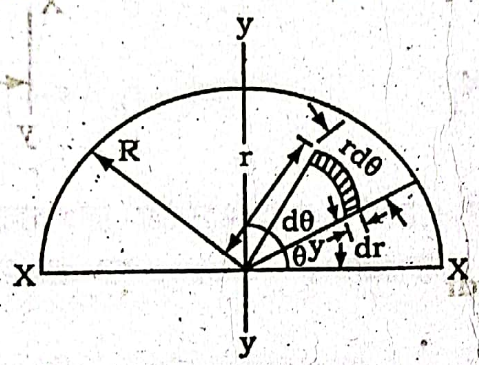
∴ ক্ষুদ্র স্ট্রিপের ক্ষেত্রফল $= dA = rd\theta.dr$

x-x অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া

$$I_{xx} = \int_0^R\int_0^\pi y^2 dA = \int_0^R\int_0^\pi (r\sin\theta)^2 rd\theta.dr \qquad \Big|\ y = r\sin\theta$$

$$= \int_0^R\int_0^\pi r^3\sin^2\theta.d\theta.dr = \int_0^R\int_0^\pi r^3.\frac{1}{2}\,2\sin^2\theta.d\theta.dr$$

$$= \int_0^R\int_0^\pi \frac{r^3}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta.dr$$



চিত্র : ৫.১০

$$= \int_0^R \frac{r^3}{2}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^\pi dr$$

$$= \int_0^R \frac{r^3}{2}[\pi - 0 - 0 + 0]dr$$

$$= \frac{1}{2}\pi\int_0^R r^3 dr$$

$$\therefore I_{xx} = \frac{1}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \times \pi = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{128}\quad\left[\because R = \frac{D}{2}\right]$$

(d) (ii) ভরকেন্দ্রগামী বা সেন্ট্রয়ডাল অক্ষের সাপেক্ষে অর্ধবৃত্তের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া

From parallel axis theorem –

$I_{xx} = I_G + Ad^2$

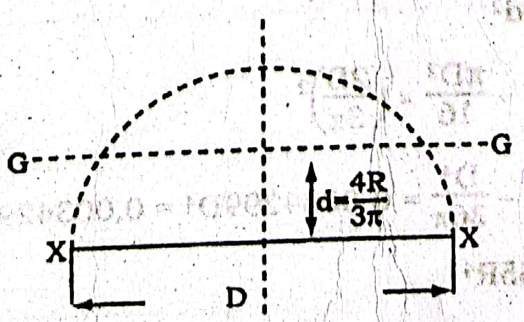
$$\Rightarrow \frac{\pi D^4}{128} = I_G + \frac{\pi D^2}{8}\times\left(\frac{2D}{3\pi}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_G = \frac{\pi D^4}{128} - \frac{4\pi D^4}{72\pi}$$

$$\therefore I_{xx} = 0.00685981D^4$$
$$= 0.00685981\times(2R)^4$$
$$= 0.11R^4$$

$$d = \frac{4R}{3\pi} = \frac{2D}{3\pi}$$

$$A = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi D^2}{8}$$



চিত্র : ৫.১১

Scanned with CamScanner

৫.৫ মোমেন্ট অব ইনার্শিয়ার জন্য লম্ব অক্ষের উপপাদ্য বিবৃতকরণ

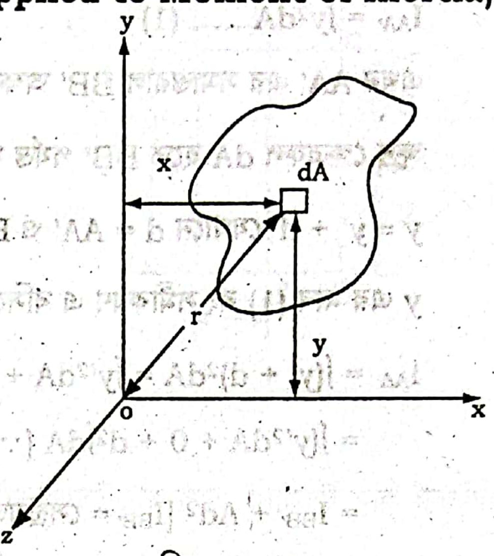
(State the Theorem of Perpendicular Axis as Applied to Moment of Inertia)

কোন ক্ষেত্রের সমতলে লম্বভাবে অবস্থিত অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া (যা যেকোন বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে) ঐ সমতলে পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত অক্ষদ্বয়ের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়ার (যারা ঐ একই বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে) যোগফলের সমান হবে।

গাণিতিকভাবে, $\boxed{I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}}$

মনে করি, O বিন্দু হতে r দূরত্বে ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল dA.

dA ক্ষেত্রের স্থানাঙ্ক x এবং y । [নিচের চিত্রে সংজ্ঞানুসারে



চিত্র : ৫.১৪

$I_{zz} = \int r^2 dA$

$= \int (x^2 + y^2) dA \qquad [\because r^2 = x^2 + y^2]$

$= \int x^2 dA + \int y^2 dA$

৫.৬ মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া ক্ষেত্রফলের জন্য সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য বিবৃতকরণ

(State the Parallel Axis Theorem in the Determination of Moment of Inertia of Areas)

সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য (Parallel Axis Theorem) : যেকোন একটি অক্ষের সাপেক্ষে কোন ক্ষেত্রের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া ঐ অক্ষের সমান্তরাল সেন্ট্রয়ডাল অক্ষের (ভারকেন্দ্রগামী অক্ষের) সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া এবং উক্ত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং ঐ দুটি সমান্তরাল অক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের গুণফলের যোগফলের সমান হবে।

গাণিতিকভাবে,

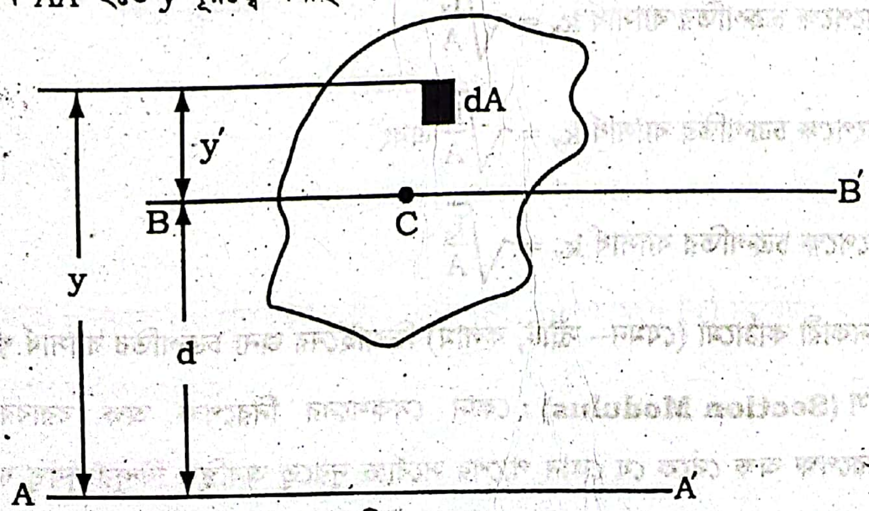
$I_{AA'} = I_{BB'} + Ad^2$

এখানে, d = রেফানেন্স অক্ষ এবং সমান্তরাল সেন্ট্রয়ডাল অক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব।

$I_{AA'}$ = রেফারেন্স অক্ষ AA′ এর সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া

$I_{BB'}$ = ভারকেন্দ্র (সেন্ট্রয়ডাল) অক্ষ BB′ এর সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া

সামান্তরাল অক্ষের উপপাদ্যের প্রমাণ (The Proof of Parallel Axis Theorm) : মনে করি, ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল dA রেফারেন্স অক্ষ AA′ হতে y দূরত্বে অবস্থিত।



চিত্র : ৫.১৫

X–X এবং Y–Y অক্ষের সাথে O বিন্দুতে কল্পিত লম্ব অক্ষ Z–Z বরাবর রিং-এর ক্ষেত্রফলের জড়তার ভ্রামক

$$I_{XX} = \int_{-d/2}^{d/2} (d.bx)(x^2) = b\int_{-d/2}^{d/2} x^2dx = b\left[\frac{x^2}{3}\right]_{-d/2}^{+d/2} = \frac{bd^3}{12}$$

[বি. দ্র. (১) উক্ত সেকশনের জড়তা-ভ্রামক] যদি X–X অক্ষের সমান্তরালে অবস্থিত Y–Y বাহু বরাবর চাওয়া হয়, তবে সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্যের সাহায্যে এর পরিমাণ হবে,

$$I_{AB} = I_{XX} + A\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{bd^3}{12} + (bd)\frac{d^2}{4}$$

$$= \frac{bd^3}{12} + \frac{bd^3}{4} = \frac{bd^3}{3}$$

একইভাবে Y–Y লাইন-এর সমান্তরাল AD অথবা BC লাইন বরাবর জড়তা ভ্রামক

$I_{AD} = I_{BC} = \frac{db^3}{12}$ পাওয়ার যাবে।

(২) $I_{XX} = \frac{bd^3}{12}$ এবং $I_{YY} = \frac{db^3}{12}$ ফলাফলগুলো মুখস্থ রাখা প্রয়োজন।

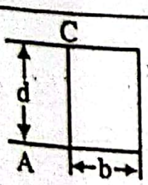
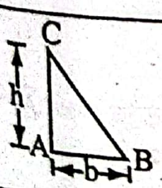
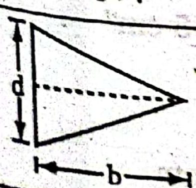
ব্যবহারের সময় $\frac{bd^3}{12}$ এর স্থলে ভুলক্রমে $\frac{db^3}{12}$ বা একটির স্থলে অপরটি যাতে ব্যবহৃত না হয়, তার সম্ভাব্য প্রতিরোধের জন্য বিবেচনা বিষয়টি স্মরণ রাখা ভাল। যে অক্ষ বরাবর M.I নেওয়া হয়, সেই অক্ষের সাথে লম্ব পাশে ত্রিঘাত (Cube) হয়।

(খ) রুথ-এর সূত্রের সাহায্যে :

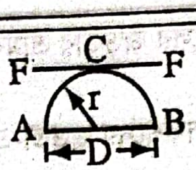
আয়তাকার সেকশনটির এর ভারকেন্দ্র পরস্পর সমকোণে তিনটি অক্ষের সাথে প্রতিসাম্য বলে রুথের সূত্রের সাহায্যে এর জড়তা-ভ্রামক নির্ণয় করা যাবে। উক্ত নিয়ম অনুসারে সেকশনের X–X বরাবর জড়তা ভ্রামক,

$$I_{SS} = \frac{A \times S}{3}$$

এই অধ্যায়ের প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি :

চিত্র	ভারকেন্দ্র (X, Y)	ক্ষেত্রফল (A)	মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া (M.I)
	$\frac{b}{2}, \frac{d}{2}$	bd	$I_{cgx} = \frac{bd^3}{12}, I_{cgy} = \frac{db^3}{12}$ $I_{AB} = \frac{bd^3}{3}, I_{AC} = \frac{db^3}{3}$
	$\frac{b}{3}, \frac{h}{3}$ (A বিন্দু হতে) $\frac{2b}{3}, \frac{2h}{3}$ (B ও C বিন্দু হতে)	$\frac{1}{2}$ bh	$I_{cgx} = \frac{bh^3}{36}, I_{cgy} = \frac{hb^3}{36}$ $I_{AB} = \frac{bh^3}{12}, I_{AC} = \frac{hb^3}{12}$
	$\frac{b}{3}, \frac{d}{2}$	$\frac{1}{2}$ bd	$I_{cgx} = \frac{bd^3}{48}, I_{cgx} = \frac{db^3}{36}$
	$\left(\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right)$ or (r, r)	$\frac{\pi}{4}D^2$ or, πr^2	$I_{cgx} = I_{cgy} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_c = \frac{5\pi D^4}{64}$

Scanned with CamScanner

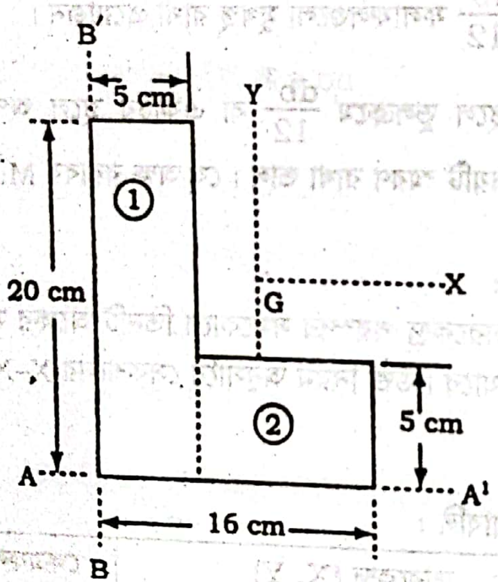
	(r, 0.424r) বেজ থেকে (r, 0.576r) C থেকে	$\frac{\pi r^2}{2}$ or, $\frac{\pi}{2\times 4}D^2$	$I_{cgx} = 0.11r^4$ $I_{cgy} = I_{AB} = \frac{\pi D^4}{128}$ $I_{FF} = 0.63\ r^4$
	(0.424R, 0.424R [সমকোণ হতে] (0.576R, 0.576R)	$\frac{\pi R^2}{4}$ or, $\frac{\pi}{4\times 4}D^2$	$I_{cgx} = I_{cgy} = \frac{0.11R^4}{2}$

সমব্যাবলির সমাধান

Solve the Problems

উদাহরণ-১। নিচের চিত্রে প্রদর্শিত সেকশনটির মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো : '০২, '১১]*

অথবা, নিচের চিত্রে প্রদর্শিত এল সেশনটির ভারকেন্দ্রের সাপেক্ষে **x** ও **y** অক্ষের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো :'০৮]*



চিত্র : ৫.১৯

সমাধান :

Given

$b_1 = 5$ cm

$h_1 = 20$ cm

$b_2 = (16 - 5)$ cm $= 11$ cm

$h_2 = 5$ cm

মনে করি, AA' ও BB' দুটি রেফারেন্স অক্ষ।

অক্ষ BB' হতে সেন্ট্রয়েডের (ভারকেন্দ্র) দূরত্ব

$$\bar{x} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2}{a_1 + a_2}$$

$$\bar{x} = \frac{100\times 2.5 + 55\times 10.5}{100 + 55}$$

$$= 5.34 \text{ cm}$$

$a_1 = 20 \times 5 = 100\ cm^2$

$a_2 = 5 \times (16 - 5) = 55\ cm^2$

$x_1 = \frac{5}{2} = 2.5$ cm

$x_2 = 5 + \frac{11}{2} = 10.5$ cm

$y_1 = \frac{20}{2} = 10$ cm

$y_2 = \frac{5}{2} = 2.5$ cm

Scanned with CamScanner

অক্ষ AA′ হতে সেন্ট্রয়েডের দূরত্ব

$$\bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2}$$

$$= \frac{100 \times 10 + 55 \times 2.5}{100 + 55}$$

$$= 7.33 \text{ cm}$$

$$I_{XX} = \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1(y_1 - \bar{y})^2 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + a_2(y_2 - \bar{y})^2$$

$$= \frac{5 \times (20)^3}{12} + 100(10 - 7.33)^2 + \frac{(16 - 5) \times 5^3}{12} + 55\,(2.5 - 7.33)^2$$

$= 5443.90 \text{ cm}^4$ **Ans.**

$$I_{YY} = \frac{h_1 b_1^3}{12} + a_1(x_1 - \bar{x})^2 + \frac{h_2 b_2^3}{12} + a_2\,(x_2 - \bar{x})^2$$

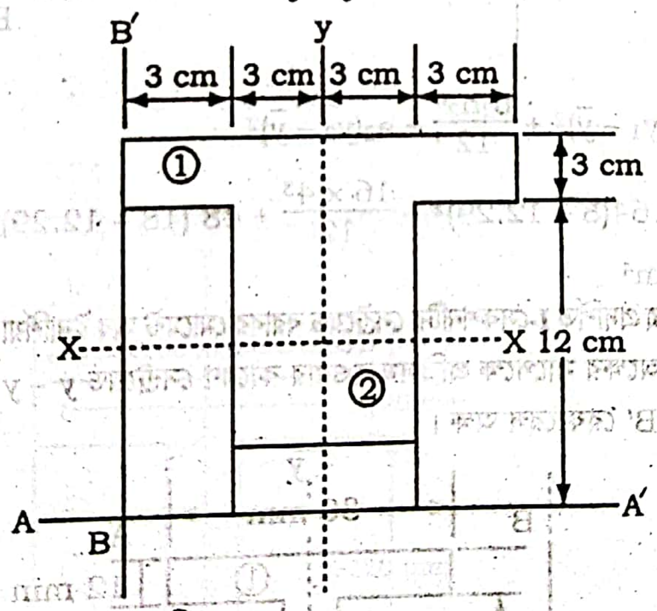
$$= \frac{20 \times 5^3}{12} + 100(2.5 - 5.34)^2 + \frac{5 \times (16 - 5)^3}{12} + 55(10.5 - 5.34)^2$$

$$= 3033.88 \text{ cm}^4$$

উদাহরণ-২। নিচের চিত্রের পরিমাপ অনুযায়ী T সেকশনটির x – x অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো : '১০R]*

সমাধান : প্রতিসম হওয়ার কারণে সেন্ট্রয়েড প্রতিসম অক্ষ y – y বরাবর অবস্থিত

Given
$b_1 = 9$ cm
$h_1 = 3$ cm
$b_2 = 3$ cm
$h_2 = 12$ cm



চিত্র : ৫.২০

Ⓐ–Ⓐ অক্ষ হতে সেন্ট্রয়েডের দূরত্ব $\bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2}$

$$= \frac{27 \times 13.5 + 36 \times 6}{27 + 36}$$

$$= 9.21 \text{ cm}$$

$a_1 = 9 \times 3 = 27 \text{ cm}^2$
$a_2 = 3 \times 12 = 36 \text{ cm}^2$
$y_1 = 12 + 3/2 = 13.5 \text{ cm}$
$y_2 = 12/2 = 6 \text{ cm}$

$$I_{xx} = \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1(y_1 - \bar{y})^2 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + a_2(y_2 - \bar{y})^2$$

$$= \frac{9 \times 3^3}{12} + 27(13.5 - 9.21)^2 + \frac{3 \times 12^3}{12} + 36(6 - 9.21)^2$$

$$= 1320.11 \text{ cm}^4$$

Scanned with CamScanner

উদাহরণ-৩। নিচের চিত্রে চিত্রানুযায়ী টি সেকশনটির ভরকেন্দ্রগামী x – x অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো : '০৯R, '১০]*

সমাধান : উল্লম্ব অক্ষের সাথে প্রতিসম হওয়ার কারণে সেন্ট্রয়েড প্রতিসম অক্ষ y – y বরাবর অবস্থিত

AA' হতে সেন্ট্রয়েডের দূরত্ব

$$\bar{y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2}{a_1 + a_2}$$

$$= \frac{64 \times 8 + 48 \times 18}{64 + 48}$$

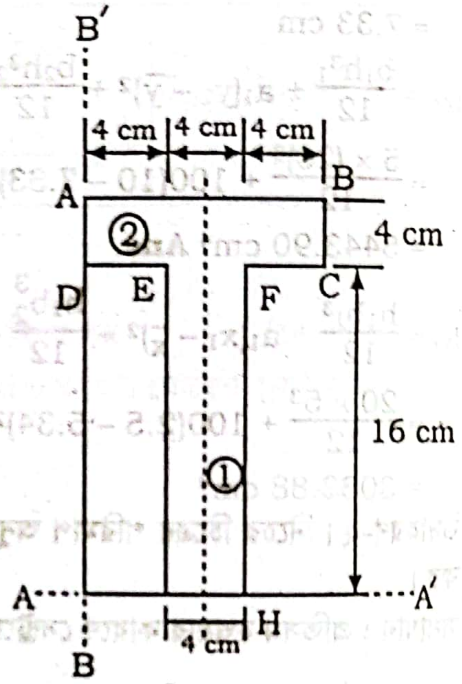
$= 12.29$ cm

$a_1 = 4 \times 16 = 64\ cm^2$

$a_2 = 12 \times 4 = 48\ cm^2$

$y_1 = 16/2 = 8$ cm

$y_2 = 16 + 4/2 = 18$ cm



চিত্র : ৫.২১

$$I_{xx} = \frac{b_1h_1^3}{12} + a_1(y_1 - \bar{y})^2 + \frac{b_2h_2^3}{12} + a_2(y_2 - \bar{y})^2$$

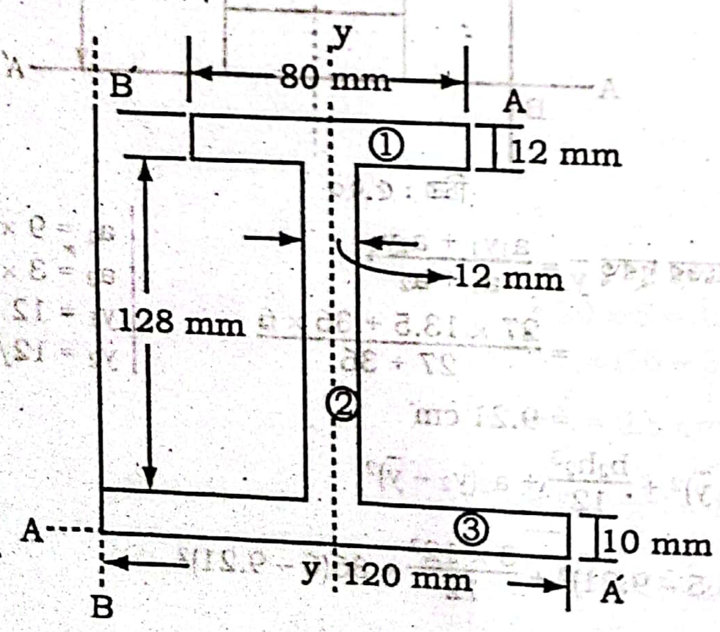
$$= \frac{4 \times (16)^3}{12} + 64(8 - 12.29)^2 + \frac{16 \times 4^3}{12} + 48\,(18 - 12.29)^2$$

$= 4193.53\ cm^4$

উদাহরণ-৪। নিচের চিত্রে প্রদর্শিত I-সেকশনটির সেন্ট্রয়েড বরাবর মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো : '১২, '১৩]*

সমাধান : ভার্টিক্যাল অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম হওয়ার কারণে সেন্ট্রয়েড y – y অক্ষের উপর অবস্থিত।

মনে করি, AA' – BB' রেফারেন্স অক্ষ।



চিত্র : ৫.২২

AA' অক্ষ হতে সেন্ট্রয়েডের দূরত্ব

$\bar{y} = \dfrac{a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3}{a_1 + a_2 + a_3}$

$\Rightarrow \bar{y} = \dfrac{960 \times 144 + 1536 \times 74 + 1200 \times 5}{960 + 1536 + 1200}$

$= 69.78$ mm

$\therefore I_{xx} = \dfrac{b_1h_1^3}{12} + a_1(y_1 - \bar{y})^2 + \dfrac{b_2h_2^3}{12} + a_2(y_2 - \bar{y})^2 + \dfrac{b_3h_3^3}{12} + a_3(y_3 - \bar{y})^2$

$= \dfrac{80 \times (12)^3}{12} + 960(144 - 69.78)^2 + \dfrac{12 \times (128)^3}{12} + 1536 \times (74 - 69.78)^2 + \dfrac{120 \times (10)^3}{12} + 1200 \times (5 - 69.78)^2$

$\therefore I_{xx} = 12470028\ mm^4$ **Ans.**

$b_1 = 12$ mm
$b_2 = 12$ mm
$b_3 = 120$ mm
$h_1 = 12$ mm
$h_2 = 128$ mm
$h_3 = 10$ mm
$a_1 = 80 \times 12 = 960\ mm^2$
$a_2 = 12 \times 128 = 1536\ mm^2$
$a_3 = 120 \times 10 = 1200\ mm^2$
$y_1 = (10 + 128 + 12/2)$
$= 144$ mm
$y_2 = 10 + 128/2$
$= 74$ mm
$y_3 = 10/2 = 5$ mm

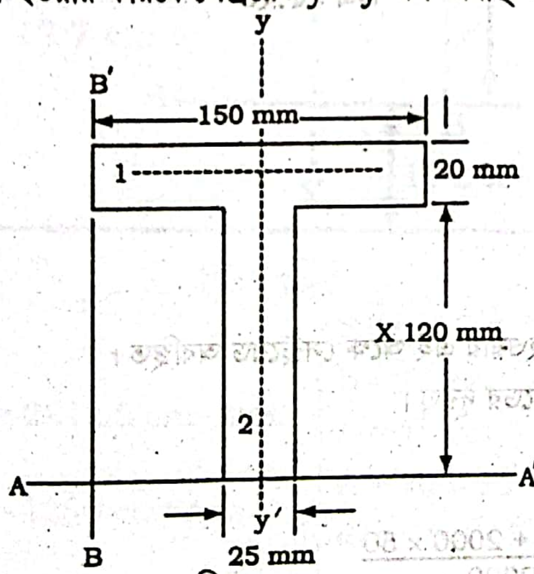
উদাহরণ-৫। নিচের চিত্রের T সেকশনটির হরিজন্টাল অক্ষের সাপেক্ষে সেন্ট্রয়েডগামী মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া এবং রেডিয়াস অব জাইরেশন (আবর্তন ব্যাসার্ধ) নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো : '৯২]*

সমাধান :

মনে করি, AA' ও BB' রেফারেন্স অক্ষ

Given
$b_1 = 150$ mm
$h_1 = 20$ mm
$b_2 = 25$ mm
$h_2 = 120$ mm

ভার্টিক্যাল অক্ষ বরাবর প্রতিসম হওয়ার কারণে সেন্ট্রয়েড y – y অক্ষ অবস্থিত।



চিত্র : ৫.২৩

AA' অক্ষ হতে সেন্ট্রয়েডের দূরত্ব

$\therefore \bar{y} = \dfrac{a_1y_1 + a_2y_2}{a_1 + a_2}$

$= \dfrac{3000 \times 130 + 3000 \times 60}{3000 + 3000}$

$\therefore \bar{y} = 95$ mm

$a_1 = 150 \times 20 = 3000\ mm^2$
$a_2 = 25 \times 120 = 3000\ mm^2$
$y_1 = 120 + \dfrac{20}{2} = 130$ mm
$y_2 = 120/2 = 60$ mm

Scanned with CamScanner

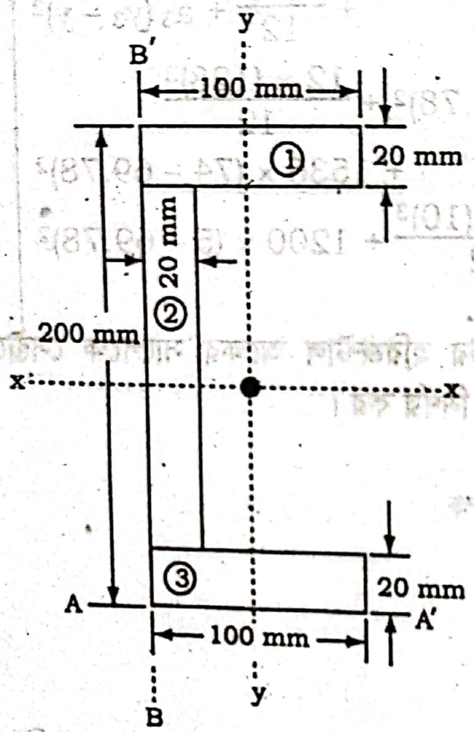
$$I_{xx} = \frac{b_1h_1^3}{12} + a(\bar{y} - y_1)^2 + \frac{b_2h_2^3}{12} + a_2(\bar{y} - y_2)^2$$

$$= \frac{150 \times (20)^3}{12} + 3000 \times (95 - 130)^2 + \frac{25 \times (120)^3}{12} + 3000 \times (95 - 60)^2$$

$$= 11.05 \times 10^6 \text{ mm}^4 \text{ Ans.}$$

রেডিয়াস অব জাইরেশন $K_x = \sqrt{\frac{I_{xx}}{A}} = \sqrt{\frac{11.05 \times 10^6}{3000 + 3000}} = 42.91$ **Ans.**

উদাহরণ-৬। নিচের চিত্রে প্রদর্শিত ক্ষেত্রটির সেন্ট্রয়ডাল অক্ষ x – x এবং y – y এর সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় কর।



চিত্র : ৫.২৪

সমাধান : দেওয়া আছে,

$b_1 = 100$ mm
$h_1 = 20$ mm
$b_2 = 20$ mm
$h_2 = 160$ mm
$b_3 = 100$ mm
$h_3 = 20$ mm

সেকশনটি x – x অক্ষে প্রতিসম হওয়ায় এই অক্ষে সেন্ট্রয়েড অবস্থিত।
BB′ রেফারেন্স অক্ষ হতে সেন্ট্রয়েডের দূরত্ব।

$$\bar{x} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3}{a_1 + a_2 + a_3}$$

$$= \frac{2000 \times 50 + 3200 \times 10 + 2000 \times 50}{2000 + 3200 + 2000}$$

$$= 32.22 \text{ mm}$$

$$I_{xx} = \frac{b_1h^3_1}{12} + a_1(\bar{y} - y_1)^2 + \frac{b_1h_2^3}{12} + a_2(\bar{y} - y_2)^2 + \frac{b_3h^3}{12} + a_3(\bar{y} - y_3)^2$$

$$= \frac{100 \times (20)^3}{12} + 2000\,(100 - 190)^2 + \frac{20 \times (160)^3}{12}$$

$a_1 = 100 \times 20$
$= 2000$ mm
$a_2 = 20 \times 160$
$= 3200$ mm^2
$a_3 = a_1 = 2000$ mm^2
$x_1 = 100/2 = 50$ mm
$x_2 = \frac{20}{2} = 10$ mm
$x_3 = x_1 = 50$ mm

Scanned with CamScanner

$= 3.936 \times 10^7\ mm^4 + 3200 \times (100-100)^2 + \frac{100 \times (20)^3}{12} + 2000\,(100-10)^2$

$I_{yy} = \frac{h_1 b^3_1}{12} + a_1(\bar{x} - x_1)^2 + \frac{h_2 b^3_2}{12} + a_2(\bar{x} - x_2)^2 + \frac{h_3 b^3_3}{12} + a^3(\bar{x} - x_3)^2$

$= \frac{20 \times (100)^3}{12} + 2000 \times (32.22 - 50)^2 + \frac{160 \times (20)^3}{12} + 3200 \times (32.22 - 10)^2 + \frac{20 \times (100)^3}{12} + 2000 \times (32.22 - 50)^2$

$= 2\left[\frac{20 \times (100)^3}{12} + 2000 \times (17.78)^2\right] + \frac{160 \times (20)^3}{12} + 3200 \times (22.2)^2$

$= 6.284 \times 10^6\ mm^4$ **Ans.**

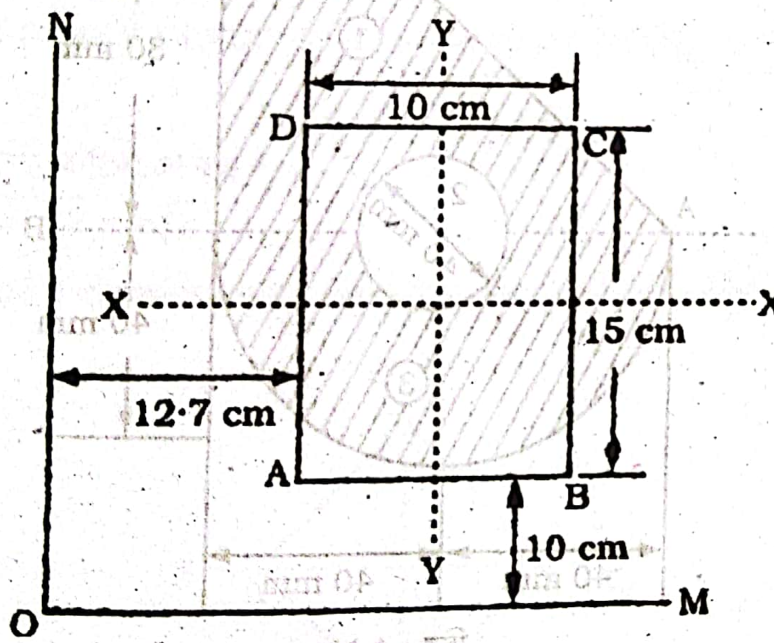
$y_1 = 20 + 160 + 20/2$
$= 190\ mm$

$y_2 = 20 + \frac{160}{2}$
$= 100\ mm$

$y_3 = \frac{20}{2} = 10\ mm$

$\bar{y} = \frac{h_{max}}{2}$
$= \frac{200}{2}$
$= 100\ mm$

উদাহরণ-৭। চিত্রের আয়তাকার সেকশনটির সেন্ট্রয়েড দিয়ে অতিক্রান্ত **X – X** অক্ষ এবং **Y – Y** অক্ষ বরাবর এবং **AB** পার্শ্ব হতে **X – X** এর সমান্তরাল **10 cm** দূরে এবং **AD** পার্শ্ব হতে **Y – Y** এর সমান্তরাল **12.7cm** দূরে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় কর। *[বাকাশিবো : '৮৬]*



চিত্র : ৫.২৫

সমাধান :

Given
b = 10 cm
h = 15 cm
$A = 10 \times 15 = 150\ cm^2$
$d_1 = 10 + 15/2 = 17.5\ cm$
$d'_1 = 12.7 + 10/2 = 17.7\ cm$

$I_{XX} = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \times (15)^3}{12} = 2812.5\ cm^4$ Ans.

$I_{YY} = \frac{hb^3}{12} = \frac{15 \times (10)^3}{12} = 1250\ cm^4$ Ans.

$I_{OM} = I_{XX} + Ad^2_1$
$= 2812.5 + 150 \times (17.5)^2$
$= 48750\ cm^4$ **Ans.**

$I_{ON} = I_{YY} + Ad_1'^2$
$= 1250 + 150 \times (17.7)^2$
$= 48243.5\ cm^4$ **Ans.**

Scanned with CamScanner

উদাহরণ-৮। নিচের চিত্রের ক্ষেত্রটির AB রেখা বরাবর মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া নির্ণয় কর।

[বাকাশিবো : '৮৭, '৮৮, '৮৯, '৯০, '৯১, '৯৬,'৯

$$I_{AB} = \frac{b_1 h_1^3}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi d_3^4}{64} - \frac{\pi d_2^4}{64}$$

$$= \frac{80 \times (80)^3}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi \times (80)^4}{64} - \frac{\pi \times (40)^4}{64}$$

$= 4292979 \text{ mm}^4$ **Ans.**

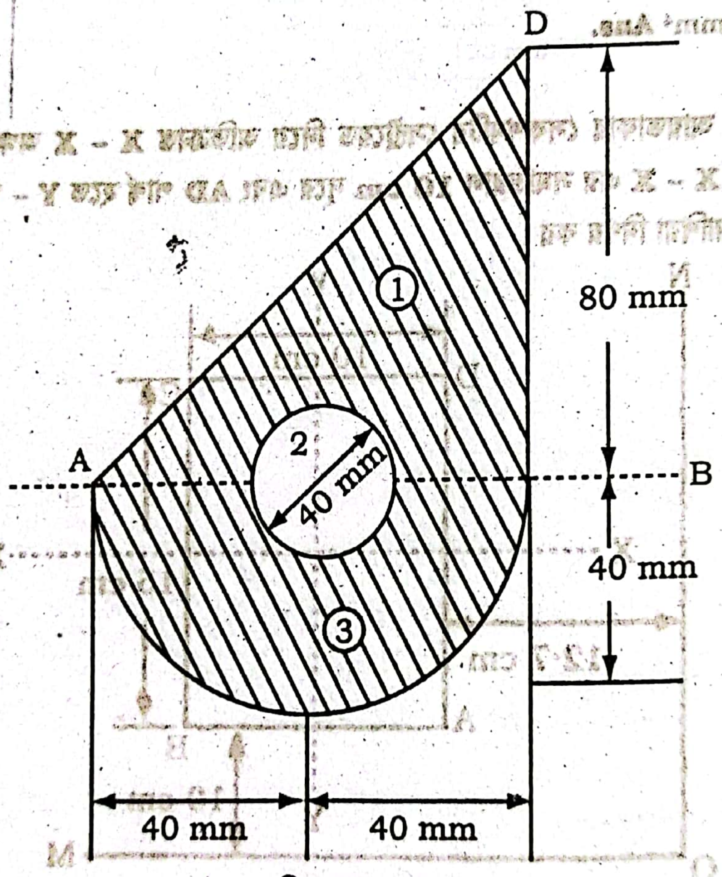
Given

$b_1 = 40 + 40 = 80$ mm

$h_1 = 80$ mm

$d_2 = 40$ mm

$d_3 = 80$ mm

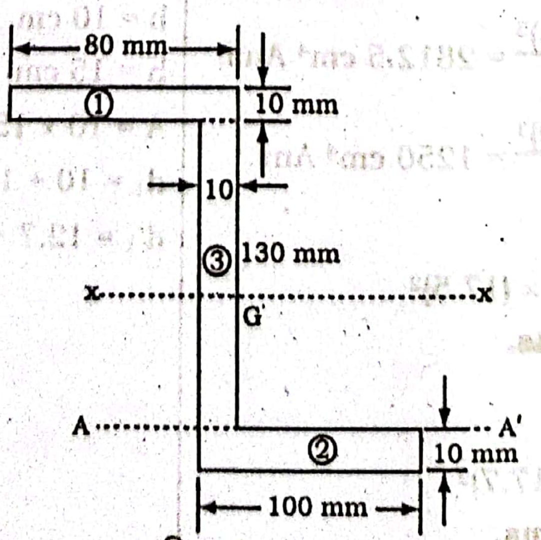


চিত্র : ৫.২৬

উদাহরণ-৯। চিত্রের Z- সেকশনটির হরিজেন্টাল সেন্ট্রয়ডাল অক্ষের সাপেক্ষে মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া বের কর।

[বাকাশিবো : '

সমাধান :



চিত্র : ৫.২৭

Scanned with CamScanner

$a_1 = 80 \times 10 = 800\ mm^2$

$a_2 = 100 \times 10 = 1000\ mm^2$

$a_3 = 10 \times 130 = 1300\ mm^2$

$y_1 = 10 + 130 + 10/2 = 145\ mm$

$y_2 = 10/2 = 5\ mm$

$y_3 = 10 + 130/2 = 75\ mm$

$$\bar{y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3}{a_1 + a_2 + a_3}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{800 \times 145 + 1000 \times 5 + 1300 \times 75}{800 + 1000 + 1300} = 70.5\ mm$$

$$I_{xx} = \frac{b_1h_1^3}{12} + a_1(\bar{y} - y_1)^2 + \frac{b_2h_2^3}{12} + a_2(\bar{y} - y_2)^2 + \frac{b3h_3^3}{12} + a_3(\bar{y} - y_3)^2$$

$$= \frac{80 \times 10^3}{12} + 800 \times (70.5 - 145)^2 + \frac{100 \times 10^3}{12} + 1000 \times (70.5 - 5)^2 + \frac{10 \times (130)^3}{12} + 1300 \times (70.5 - 75)^2$$

$= 1060.26 \times 10^4 mm^4$ **Ans.**

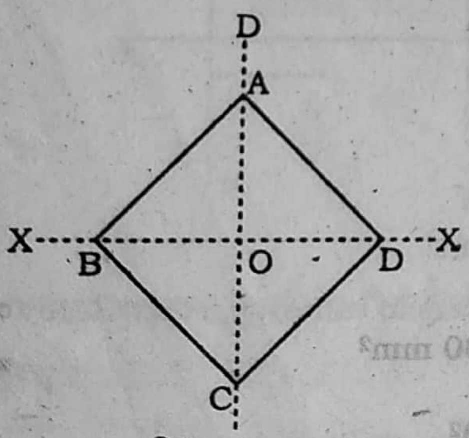
উদাহরণ-১০। দেখাও যে, একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ বরাবর মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া, $I = \frac{a^4}{12}$, যেখানে a = বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু।

[বাকাশিবো : '৯০, '৯১]

সমাধান : দেওয়া আছে, বর্গক্ষেত্রের বাহু = a

$\therefore$ কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 \times 2} = a\sqrt{2}$

যেহেতু বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে সুতরাং $OA = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$



চিত্র : ৫.২৮

কর্ণ বরাবর মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া

$$I_{xx} = 2 \times \frac{BD \times OA^3}{12} \quad [\because \Delta ABD = \Delta BCD]$$

$$= 2 \times \frac{a\sqrt{2} \times \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3}{12}$$

$$= \frac{2 \times a\sqrt{2} \times a^3 \times 2\sqrt{2}}{12 \times 8}$$

$\therefore I_{xx} = \frac{a^4}{12}$ **(Proved)**

Scanned with CamScanner